Einleitung

in die

Infinitesimal - Rechnung

zum

Selbstunterricht.

Mit Rücksicht auf das Nothwendigste und Wichtigste.

Von

H. B. Lübsen.

„Die Analysis des Unendlichen ist deshalb von so grosser Anwendbarkeit in der Naturwissenschaft, weil in der Natur sich beständig der Character des Unendlichen offenbart." Leibnitz.

II. Theil: Integral-Rechnung.

Hamburg.

Perthes-Besser & Mauke.

1855.

II. Theil:

Integral - Rechnung.

Einleitung.

1.

Die Integralrechnung ist in rein formeller Hinsicht gerade das Umgekehrte der Differentialrechnung. Denn abgesehen von den mancherlei Anwendungen der Differentialrechnung, welche zusammen den eigentlichen materiellen Begriff derselben bilden, ist ihr nächster Zweck, von einer gegebenen Function einer veränderlichen Grösse das Differential dieser Function anzugeben. So ist z. B. von x^5 das Differential $= 5x^4 dx$. In Zeichen: $d \cdot x^5 = 5x^4 dx$.

Umgekehrt ist nun, nach dem ersten, rein formellen, vorläufig noch alle Anwendungen ausschliessenden Begriff der Integralrechnung, ihr nächster Zweck: zu einem gegebenen Differential einer veränderlichen Grösse die zugehörige ursprüngliche Function zu finden, welche dann das Integral des gegebenen Differentials heisst. So ist z. B. x^5 das Integral von $5x^4 dx$.

Um anzudeuten, dass das Integral zu einem Differential gesucht werden soll, ist von Leibnitz das Zeichen $\int$ gewählt, welches man vor das gegebene Differential setzt. So ist z. B. $\int 5x^4 dx = x^5$.

2.

Nach Leibnitzen's Anschauung bedeutet das Wort Integral so viel als Summe einer unendlichen Reihe unendlich kleiner Grössen und das Zeichen $\int$ das Summirungszeichen. Wir werden später bei der Anwendung der Integralrechnung zeigen, dass man in vielen Fällen das Integral eines Differentials wirklich als eine Summe betrachten kann. Vorläufig aber muss der Anfänger sich

an dem engen Begriff halten und unter Integral nichts anderes verstehen, als die zu einem gegebenen Differential gehörige Function, welche also differentiirt, das gegebene Differential wieder giebt. Erst müssen wir wenigstens einige Differentiale integriren, d. h. ihre Integrale finden können, bevor wir Anwendungen machen, den Nutzen der Integralrechnung zeigen und so nach und nach zu ihrem erweiterten (materiellen) Begriff gelangen können.

Bemerken wollen wir noch, dass, obgleich wir jede Function zu differentiiren wissen, wir jedoch, strenge genommen, nicht auch umgekehrt jedes Differential integriren können, und in solchen Fällen uns immer mit einer Annäherung begnügen müssen, so wie, vergleichsweise, wir wohl jede Zahl potentiren, nicht aber umgekehrt aus jeder Zahl eine Wurzel ziehen können, weil ja die meisten irrational sind.

3.

Zunächst merke man sich die aus den in der Differential-Rechnung (§ 31) aufgestellten Differentialformeln, sich von selbst ergebenden sogenannten Integrationsformeln, die man im Gedächtniss behalten muss. Diese sind nämlich:

1.	$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$	6.	$\int \sin x\, dx = -\cos x$
2.	$\int e^x dx = e^x$	7.	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$
3.	$\int a^x dx = \frac{a^x}{la}$	8.	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x$
4.	$\int \frac{dx}{x} = lx$	9.	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{Arc} \sin x$
5.	$\int \cos x\, dx = \sin x$	10.	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} x$

4.

Zu vorstehenden zehn Fundamentalformeln haben wir noch ein paar Bemerkungen zu machen.

1. Nach der ersten Formel muss man, um das Integral $\int x^m dx$ zu erhalten, zu dem Exponenten m eine Einheit addiren und dann die neue Potenz x^{m+1} durch den neuen Exponenten $m+1$ dividiren. So ist z. B.:

$$\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4};\quad \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}};\quad \int x^{-4}dx = -\tfrac{1}{3}x^{-3}$$

Diese Regel gilt (den einzigen Fall, wo $m = -1$ ist ausgenommen) für alle, ganze oder gebrochene, positive oder negative, Exponenten. Der Fall, wo $m = -1$ ist, führt auf die vierte Fundamentalformel.

Es ist nämlich: $\int x^{-1}dx = \int \frac{dx}{x} = lx.$ Die übrigen neun Formeln sind aber ganz allgemein gültig.

2. Es ist leicht einzusehen, weil es schon aus den Differentialformeln (Diff.-Rechn. § 31) folgt, dass man einen constanten unter dem Integrationszeichen stehenden Factor immer vor dasselbe setzen kann. So ist z. B.:

$$\int 4x^5\,dx = 4\int x^5\,dx = 4\cdot\frac{x^6}{6} = \tfrac{2}{3}x^6.$$

$$\int ax^m\,dx = a\int x^m dx = \frac{a}{m+1}x^{m+1}$$

$$\int a\cos x\,dx = a\int \cos x\,dx = a\cdot\sin x$$

3. Da die Differentiale zweier Functionen, die sich nur um ein constantes Glied unterscheiden, vollkommen gleich sind (Diff.-Rechn. § 14, 1), so ist klar, dass man jedem gefundenen Integral immer eine ganz beliebige constante Grösse, sowohl mit dem plus- als minus-Zeichen hinzufügen könnte. So ist z. B.:

$$\int e^x dx = e^x;\ \text{aber auch}\ \int e^x dx = e^x \pm c$$

weil sowohl die Function e^x, als auch $e^x \pm c$, differentiirt, das gegebene Differential wiedergiebt. Da wir aber erst bei den Anwendungen der Integralrechnung zeigen können, was für Umstände die Hinzufügung einer constanten Grösse, $\pm c$, zu einem gefundenen Integral zuweilen erheischen, so wollen wir auch bis dahin, des kürzern Schreibens halber, diese, hier noch ganz überflüssige Constante stets weglassen.

5.

Nachdem wir nun die nöthigen Vorbegriffe über den nächsten rein formellen Zweck der Integralrechnung vorausgeschickt haben, wollen wir nun zuerst die wichtigsten der verschiedenen Regeln

mittheilen, welche man für die Integration der verschiedenen Differentiale aufgefunden hat. Dass es hier keine einzige allgemeine Integrationsregel giebt, die Verschiedenartigkeit der Functionen vielmehr verschiedene Regeln hervorrufen, ist wohl vorauszusehen. Aus diesem Grunde muss auch, um Ordnung zu erhalten, die Integralrechnung in mehrere Abtheilungen zerfallen. Man wird übrigens bald bemerken, dass fast die ganze Integralrechnung aus lauter mitunter sehr feinen Kunstgriffen besteht und nur Mathematiker ersten Ranges hier etwas leisten, sie erfinden und vervollkommnen konnten.

Erstes Buch.

Die wichtigsten und am häufigsten Anwendung findenden Regeln der Integralrechnung.

I. Unmittelbare Integration.

6.

Alle Integrationen, wenn sie möglich sind, müssen im Grunde immer auf eine der § 3 aufgestellten Fundamentalformeln zurückgeführt werden. Bevor jedoch dies geschehen kann, müssen mit den zu integrirenden Differentialen oftmals erst Umformungen vorgenommen oder auch neue veränderliche Grössen substituirt werden.

Eine Hauptregel ist immer, jedesmal erst genau zuzusehen, ob man ein verlangtes Integral nicht unmittelbar erkennen, oder doch durch eine einfache Substitution auf eine der Fundamentalformeln zurückführen kann. So sieht man z. B. leicht, dass: $\int \frac{dx}{1+x} = l(1+x)$ oder, wenn man eine Substitution zu Hülfe nehmen will und $1+x=u$, mithin $dx=du$ setzt, dass:

$$\int \frac{dx}{1+x} = \int \frac{du}{u} = lu = l(1+x).$$ Ebenso ist:

$$\int \frac{dx}{1+a^2x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{a} \text{ Arc tg } u = \frac{1}{a} \text{ Arc tg } ax$$

Hier wurde $ax=u$, mithin $dx = \frac{1}{a} \cdot du$ gesetzt.

7.

Nach einiger Uebung werden solche einfache Substitutionen überflüssig. Man merke sich bei solchen unmittelbaren Integrationen noch folgende specielle Fälle.

1. Ist, abgesehen von einem constanten Factor oder Divisor, der Zähler eines Bruches das Differential vom Nenner, so ist das Integral immer gleich dem natürlichen Logarithmus vom Nenner. So ist z. B.:

$\int \frac{mx\,dx}{a+bx^2} = \frac{m}{2b}\,l\,(a+bx^2)$, oder wenn man $a + bx^2 = u$, also $2bx\,dx = du$, mithin $x\,dx = \frac{du}{2b}$ setzt:

$$\int \frac{mx\,dx}{a+bx^2} = \frac{m}{2b}\int \frac{du}{u} = \frac{m}{2b}\,l\,u = \frac{m}{2b}\,l\,(a+bx^2).$$

2. Besteht das Differential aus zwei Factoren, wovon der eine eine Potenz mit positiven oder negativen Exponenten und der andere (von einem constanten Factor abgesehen) das Differential von der Wurzel ist, so ist das Integral gleich der um eine Einheit höhern Potenz. So ist z. B.:

$$\int \frac{x^2\,dx}{(1-x^3)^2} = \int (1-x^3)^{-2} x^2\,dx = \tfrac{1}{3}(1-x^3)^{-1} = \frac{1}{3(1-x^3)}$$

oder auch, indem man $1 - x^3 = u$, mithin $-3x^2dx = du$ und $x^2dx = -\frac{1}{3}du$ setzt:

$$\int \frac{x^2\,dx}{(1-x^3)^2} = -\tfrac{1}{3}\int u^{-2}du = -\tfrac{1}{3}\cdot\frac{u^{-2+1}}{-2+1} = \tfrac{1}{3}(1-x^3)^{-1}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}x\,dx = -(1-x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

3 Besteht ein zu integrirendes Differential aus mehren durch + oder − verbundenen Gliedern, so muss man natürlich jedes einzelne Glied integriren (Diff.-Rechn. § 31, 6). Wäre z. B.:

$$y = 2x^6 + e^x - \sin x, \text{ so ist:}$$
$$dy = 12x^5dx + e^x dx - \cos x\,dx.$$

und also umgekehrt:

$$\int dy = \int (12x^5 + e^x - \cos x)dx$$
$$y = \int 12x^5 dx + \int e^x dx - \int \cos x dx$$
$$y = 2x^6 + e^x - \sin x.$$

$$\int \frac{(1+x)}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{Arc} \sin x - \sqrt{1-x^2}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = \operatorname{tg} x - \cot x$$

8.

Aufgabe. Man suche folgende Differentiale, ohne Substitution, unmittelbar zu integriren.

1. $\frac{dx}{x-a}$
2. $\frac{dx}{(x-a)^m}$
3. $\frac{dx}{a^2+x^2}$
4. $e^{ax} dx$
5. $e^{-ax} dx$
6. $\cos ax\, dx$
7. $\frac{a dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$
8. $\frac{a x dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$
9. $lx \cdot \frac{dx}{x}$
10. $\frac{x dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$
11. $(a+bx)^2 dx$
12. $(a+bx+cx^2)^{\frac{3}{2}} \cdot (b+2cx)dx$

Auflösung. Man findet leicht, dass:

1. $\int \frac{dx}{x-a} = l(x-a)$
2. $\int \frac{dx}{(x-a)^m} = \frac{(x-a)^{-m+1}}{-m+1}$
3. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \text{Arc} \operatorname{tg} \frac{x}{a}$
4. $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$
5. $\int e^{-ax} dx = -\frac{1}{a} e^{-ax}$
6. $\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax$
7. $\int \frac{a dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = a \text{ Arc} \sin \frac{x}{a}$
8. $a \int (a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}} x dx = -a(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$
9. $\int (lx)' \cdot \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}(lx)^2$ (§ 7, 2)

7.

Nach einiger Uebung werden solche einfache Substitutionen überflüssig. Man merke sich bei solchen unmittelbaren Integrationen noch folgende specielle Fälle.

1. Ist, abgesehen von einem constanten Factor oder Divisor, der Zähler eines Bruches das Differential vom Nenner, so ist das Integral immer gleich dem natürlichen Logarithmus vom Nenner. So ist z. B.:

$\int \frac{mx\,dx}{a+bx^2} = \frac{m}{2b} l\,(a + bx^2)$, oder wenn man $a + bx^2 = u$, also $2bx\,dx = du$, mithin $x\,dx = \frac{du}{2b}$ setzt:

$$\int \frac{mx\,dx}{a+bx^2} = \frac{m}{2b}\int \frac{du}{u} = \frac{m}{2b} l u = \frac{m}{2b} l\,(a+bx^2).$$

2. Besteht das Differential aus zwei Factoren, wovon der eine eine Potenz mit positiven oder negativen Exponenten und der andere (von einem constanten Factor abgesehen) das Differential von der Wurzel ist, so ist das Integral gleich der um eine Einheit höhern Potenz. So ist z. B.:

$$\int \frac{x^2\,dx}{(1-x^3)^2} = \int (1-x^3)^{-2} x^2 dx = \tfrac{1}{3}(1-x^3)^{-1} = \frac{1}{3(1-x^3)}$$

oder auch, indem man $1 - x^3 = u$, mithin $- 3x^2dx = du$ und $x^2dx = -\frac{1}{3}du$ setzt:

$$\int \frac{x^2\,dx}{(1-x^3)^2} = -\tfrac{1}{3}\int u^{-2}du = -\tfrac{1}{3}\cdot\frac{u^{-2+1}}{-2+1} = \tfrac{1}{3}(1-x^3)^{-1}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} x\,dx = -(1-x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

3 Besteht ein zu integrirendes Differential aus mehren durch + oder − verbundenen Gliedern, so muss man natürlich jedes einzelne Glied integriren (Diff.-Rechn. § 31, 6). Wäre z. B.:

$$y = 2x^6 + e^x - \sin x, \text{ so ist:}$$
$$dy = 12x^5 dx + e^x dx - \cos x\,dx,$$

und also umgekehrt:

$$\int dy = \int (12x^5 + e^x - \cos x)dx$$
$$y = \int 12x^5 dx + \int e^x dx - \int \cos x dx$$
$$y = 2x^6 + e^x - \sin x.$$

$$\int \frac{(1+x)}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{Arc} \sin x - \sqrt{1-x^2}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx = \text{tg}\, x - \text{cot}\, x$$

8.

Aufgabe. Man suche folgende Differentiale, ohne Substitution, unmittelbar zu integriren.

1. $\frac{dx}{x-a}$	7. $\frac{adx}{\sqrt{a^2-x^2}}$
2. $\frac{dx}{(x-a)^m}$	8. $\frac{axdx}{\sqrt{a^2-x^2}}$
3. $\frac{dx}{a^2+x^2}$	9. $lx \cdot \frac{dx}{x}$
4. $e^{ax} dx$	10. $\frac{xdx}{\sqrt{a^2+x^2}}$
5. $e^{-ax} dx$	11. $(a+bx)^2 dx$
6. $\cos ax\, dx$	12. $(a+bx+cx^2)^{\frac{3}{2}} \cdot (b+2cx)dx$

Auflösung. Man findet leicht, dass:

1. $\int \frac{dx}{x-a} = l(x-a)$ 4. $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$

2. $\int \frac{dx}{(x-a)^m} = \frac{(x-a)^{-m+1}}{-m+1}$ 5. $\int e^{-ax} dx = -\frac{1}{a} e^{-ax}$

3. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \text{Arc tg} \frac{x}{a}$ 6. $\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax$

7. $\int \frac{adx}{\sqrt{a^2-x^2}} = a \text{ Arc} \sin \frac{x}{a}$

8. $a \int (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} x dx = -a (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$

9. $\int (lx)' \cdot \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} (lx)^2$ (§ 7, 2)

$$10.\quad \int (a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}} x\,dx = \sqrt{a^2+x^2}$$

$$11.\quad \int (a+bx)^2 \cdot dx = \frac{(a+bx)^3}{3b}$$

$$12.\quad \int (a+bx+cx^2)^{\frac{3}{2}}\ (b+2cx)\,dx = \tfrac{2}{5}(a+bx+cx^2)^{\frac{5}{2}}$$

Das Integral No. 11 findet man auch so:

$\int (a+bx)^2\,dx = \int (a^2+2abx+b^2x^2)\,dx = a^2x + abx^2 + \frac{1}{3}b^2x^3$

Dies Integral ist von dem in 11 angeführten nur in der Constante $\frac{a^3}{3b}$ verschieden.

II. Theilweise Integration.

9.

Ein sehr fruchtbarer Kunstgriff, um Integrale zu finden, besteht in der sogenannten theilweisen Integration. Um zu zeigen, was man hierunter zu verstehen hat, seien $F(x)$ und $f(x)$ zwei beliebige Functionen von x. Differentiirt man das Product derselben, so hat man (Diff.-Rechn. § 31, 7):

$$d\cdot[F(x)\cdot f(x)] = f(x)\cdot F'(x)dx + F(x)\cdot f'(x)dx\,^{*)}$$

und, wenn man beiderseits wieder integrirt und beachtet, dass die Zeichen $\int$ und d sich aufheben, so folgt aus obiger Gleichung (§ 6, 3):

$$F(x)\cdot f(x) = \int f(x)\cdot F'(x)dx + \int F(x)\cdot f'(x)dx$$

und hieraus:

$$\int F(x)\cdot f'(x)dx = F(x)\cdot f(x) - \int f(x)\cdot F'(x)dx$$

in Worten: **Kann man ein zu integrirendes Differential $F(x)\,f'(x)dx$, in zwei solcher Factoren $F(x)\cdot f'(x)dx$ zerlegen, von welchen der eine $f'(x)dx$ integrabel ist, so ist, wie vorstehende Gleichung lehrt, das Integral von $F(x)\cdot f'(x)dx$ gleich dem ersten Factor**

*) Bezeichnet man die eine Function von x Kürze halber mit u, die andere mit v, so hat man, leichter zu überblicken:

$$d(u\cdot v) = v\cdot du + u\cdot dv$$
$$uv = \int v\cdot du + \int u\cdot dv$$
$$\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du$$

F(x) multiplicirt mit dem Integral des zweiten $\int f'(x)dx = f(x)$, weniger dem Integral aus dem gefundenen Integral, $f(x)$, multiplicirt mit dem Differential vom ersten Factor $d\cdot F(x) = F'(x)dx$. Lässt sich nun dieses neue Integral $\int f(x)\cdot F'(x)dx$ finden, wie es oft der Fall ist, so hat man offenbar auch das eigentlich verlangte Integral, und dies ist es, was man unter theilweiser Integration versteht. So ist z. B:

$$\int xe^x dx = \int x\cdot e^x dx = x\cdot e^x - \int e^x\cdot dx = xe^x - e^x.$$

Es ist mithin $\int xe^x dx = e^x(x-1)$. Hier war nach der kurzen in der Note angegebenen Formel $u = x$ und $dv = e^x dx$. Ebenso findet man: $\int \cos x\cdot x dx = x\cdot \sin x + \cos x$. Es ist nämlich:

$$\int \cos x\cdot x dx = \int x\cdot \cos x dx = x\cdot \sin x - \int \sin x\cdot dx = x \sin x + \cos x$$

Hier war $u = x$ und $dv = \cos x dx$.

10.

Es kann vorkommen, dass man die theilweise Integration mehrmals wiederholen muss. So ist z. B.:

$$\int x^2\cdot \cos x dx = x^2\cdot \sin x - \int \sin x\cdot 2x dx, \text{ oder:}$$
$$\int x^2\cdot \cos x dx = x^2\cdot \sin x - 2\int x\cdot \sin x dx \cdots\cdots\cdots (1)$$

Wiederholt man die theilweise Integration mit dem zweiten Gliede rechter Hand der Gleichung (1), so hat man:

$$\int x\cdot \sin x dx = x\cdot(-\cos x) + \int \cos x dx \cdots\cdots (2)$$
$$\int \cos x dx = \sin x \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

Aus diesen drei Gleichungen hat man leicht folgende drei geordnet unter einander, was gleich hätte geschehen können, nämlich:

$$\int x^2 \cos x\, dx = x^2 \sin x - 2\int x \sin x dx$$
$$-2\cdot\int x \sin x\, dx = 2x \cos x - 2\int \cos x\, dx$$
$$-2\int \cos x\, dx = -2 \sin x$$

Aus der Addition dieser drei Gleichungen folgt:

$$\int x^2 \cos x\, dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x$$

11.

Aufgabe. Man versuche folgende Differentiale durch theilweise Integration zu integriren.

1. $lx \cdot dx$; 2. $\frac{lx}{x} dx$; 3. $\text{Arc tg}\, x\, dx$;

4. $\text{Arc sin}\, x\, dx$; 5. $\text{Arc cos}\, x\, dx$; 6. $x^m lx\, dx$.

Auflösung. Man findet hier:

1. $\int lx\, dx = lx \cdot x - \int x \frac{dx}{x} = x(lx - 1)$

2. $\int lx \cdot \frac{dx}{x} = lx \cdot lx - \int lx \cdot \frac{dx}{x}$

und wenn man das Integral rechter Hand mit dem gleichnamigen linker Hand vereinigt:

$$2 \int lx \cdot \frac{dx}{x} = (lx)^2, \text{ also:}$$

$$\int lx \cdot \frac{dx}{x} = \tfrac{1}{2}(lx)^2$$

3. $\int \text{Arc tg}\, x\, dx = \text{Arc tg}\, x \cdot x - \int \frac{x\,dx}{1 + x^2}$

$$\int \text{Arc tg}\, x\, dx = x\, \text{Arc tg}\, x - \tfrac{1}{2} l(1 + x^2)$$

4. $\int \text{Arc sin}\, x\, dx = \text{Arc sin}\, x \cdot x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\int \text{Arc sin}\, x\, dx = x \cdot \text{Arc sin}\, x + (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

5. $\int \text{Arc cos}\, x\, dx = x\, \text{Arc cos}\, x - \sqrt{1 - x^2}$

6. $\int lx \cdot x^m dx = lx \cdot \frac{x^{m+1}}{m+1} - \frac{1}{m+1} \int x^m dx$

$$\int lx \cdot x^m dx = \frac{x^{m+1} lx}{m+1} - \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2}$$

III. Integration rational gebrochener Functionen.

12.

Bei den gebrochenen rationalen Functionen können wir immer annehmen, 1. dass Zähler und Nenner keinen gemeinschaftlichen Factor haben, weil man diese gegen einander aufheben kann; 2. dass die gebrochene Function eine echt gebrochene ist, weil man sonst, durch Division mit dem Nenner in den Zähler, die ganze Function erst herausziehen kann. Die Aufgabe kömmt also

darauf zurück, eine echt gebrochene Function $\frac{f(x)}{F(x)} \cdot dx$ zu integriren. Dieses ist aber (im Allgemeinen) nur dann möglich, wenn sich die gebrochene Function in Partialbrüche zerlegen lässt, deren Nenner Formen ersten oder zweiten Grades, oder auch Potenzen davon sind und deren Zähler constant oder Formen ersten Grades sind. Die Regeln, eine gebrochene Function, wenn möglich, in die erwähnten Partialbrüche zu zerlegen, sind in der Analysis § 140 erklärt und müssen hier als bekannt vorausgesetzt werden.

13.

Ist die Zerlegung der gebrochenen Function $\frac{f(x)}{F(x)}$ in Partialbrüche möglich, so hat man nur eine Reihe von Brüchen zu integriren und die Summe dieser Integrale ist dann das gesuchte. Den einzigen Bruch ausgenommen, welcher eine Potenz von x^2+px+q zum Nenner hat und besonders betrachtet werden muss, findet man die Integrale der übrigen unmittelbar nach den Fundamentalformeln (1) und (4) (§ 3).

14.

Aufgabe. Man suche folgende angedeutete Integrale:

1. $\int \frac{7x+24}{x^2+3x-18} \cdot dx$; 2. $\int \frac{24}{x^2+3x-18} \cdot dx$; 3. $\int \frac{dx}{x^2-a^2}$

4. $\int \frac{x^3+8x^2+4x-66}{x^2+3x-18} \cdot dx$; 5. $\int \frac{x^3-6x^2+15x-2}{(x-2)^3\,(x+2)}\,dx$

Auflösung. Man hat hier (Analysis 141, etc.):

1. $\int \frac{(7x+24)dx}{x^2+3x-18} = \int \left(\frac{5\,dx}{x-3} + \frac{2dx}{x+6}\right) = 5l(x-3) + 2\,l(x+6)$

2. $\int \frac{24dx}{x^2+3x-18} = \int \left(\frac{8}{3} \cdot \frac{dx}{x-3} - \frac{8}{3} \cdot \frac{dx}{x+6}\right)$

$$= \tfrac{8}{3}\left(l(x-3) - l\,(x+6)\right)$$

$$= \tfrac{8}{3}\,l\,\frac{x-3}{x+6} = l\left(\frac{x-3}{x+6}\right)^{\frac{8}{3}}$$

3. $$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{dx}{a+x} + \frac{dx}{a-x}\right) = \frac{1}{2a}\left(l(a+x) - l(a-x)\right)$$
$$= \frac{1}{2a}\, l\left(\frac{a+x}{a-x}\right) = -\frac{1}{2a}\, l\,\frac{a-x}{a+x}$$

4. $$\int \frac{x^3 + 8x^2 + 4x - 66}{x^2 + 3x - 18}\cdot dx = \int\left(x + 5 + \frac{7x + 24}{x^2 + 3x - 18}\right)dx$$ (Anal. §141)
$$= \tfrac{1}{2}x^2 + 5x + 2l(x+6) + 5\,l(x-3)$$

5. $$\int \frac{x^3 - 6x^2 + 15x - 2}{(x-2)^3(x+2)}\cdot dx = \int\left(\frac{dx}{x+2} + \frac{3\,dx}{(x-2)^3}\right) = l(x+2) - \tfrac{3}{2}(x-2)^{-2}$$

*15.

* Für die Integrale $\int \frac{dx}{x^2 + px + q}$, $\int \frac{x dx}{x^2 + px + q}$ und $\int \frac{(Ax + B)dx}{x^2 + px + q}$ lassen sich auch, für vorkommende Fälle, allgemeine Formeln aufstellen, jedoch muss man dann zwei Fälle unterscheiden, wo die einfachen Factoren des Nenners reel oder imaginair sind.

1. Wenn die Wurzeln imaginair sind, mithin, wenn q positiv, $\frac{p^2}{4} < q$ ist.*) Dann setze man, um die hier unbequemen imaginairen Grössen zu vermeiden:

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \int \frac{dx}{(x + \frac{1}{2}p)^2 + q - \frac{p^2}{4}}$$

Setzt man einstweilen $q - \frac{p^2}{4} = a^2$, $x + \frac{1}{2}p = u$, mithin $dx = du$, so ist:

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\ \text{Arc tg}\ \frac{u}{a}$$

und wenn man für u und a ihre Werthe zurücksetzt:

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \frac{2}{\sqrt{4q - p^2}}\cdot \text{Arc tg}\ \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} \cdots\cdots (1)$$

---

*) Aus $x^2 + px + q = 0$, folgt: $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\left(\frac{p^2}{4} - q\right)}$

So ist z. B. $\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 3} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ Arc tg $\frac{x-1}{\sqrt{2}}$

Wäre $q = \frac{p^2}{4}$, also $4q - p^2 = 0$, so wäre der Nenner ein vollkommenes Quadrat und es ist dann: $\int \frac{dx}{(x + \frac{1}{2}p)^2} = - \frac{1}{x + \frac{1}{2}p}$

2. Wenn die Wurzeln reel sind, mithin q entweder negativ, oder wenn positiv, dann doch $\frac{p^2}{4} > q$. Dann setze man:

$$\int \frac{dx}{x^2 + px - q} = \int \frac{dx}{(x + \frac{1}{2}p)^2 - (\frac{p^2}{4} + q)} = \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\, l\left(\frac{u-a}{u+a}\right)$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + px - q} = \frac{1}{\sqrt{p^2 + 4q}} \cdot l\, \frac{2x + p - \sqrt{p^2 + 4q}}{2x + p + \sqrt{p^2 + 4q}} \quad \cdots\cdots\cdots (2)$$

So ist z. B. $\int \frac{24\,dx}{x^2 + 3x - 18} = \frac{8}{3} \cdot l\left(\frac{x-3}{x+6}\right)$

Die allgemeine Formel für das zweite Integral ergiebt sich nun sehr leicht. Es ist nämlich:

$$\int \frac{xdx}{x^2 + px + q} = \int \frac{xdx}{(x + \frac{1}{2}p)^2 + q - \frac{p^2}{4}}$$

und wenn man $x + \frac{1}{2}p = u$, also $x = u - \frac{1}{2}p$, $dx = du$ und $q - \frac{p^2}{4} = a^2$ setzt:

$$\int \frac{xdx}{x^2 + px + q} = \int \frac{(u - \frac{1}{2}p)du}{u^2 + a^2} = \int \frac{udu}{u^2 + a^2} - \frac{1}{2}p \int \frac{du}{u^2 + a^2}$$

$$\int \frac{xdx}{x^2 + px + q} = \frac{1}{2}\, l\,(x^2 + px + q) - \frac{1}{2}p \int \frac{dx}{x^2 + px + q} \cdots (3)$$

wo nun das Integral rechter Hand, je nachdem $\frac{p^2}{4} \lessgtr q$, nach Formel (1) oder (2) zu nehmen ist.

Für das dritte Integral hat man jetzt:

$$\int \frac{(Ax + B)dx}{x^2 + px + q} = A \int \frac{xdx}{x^2 + px + q} + B \int \frac{dx}{x^2 + px + q}$$

$$A \int \frac{xdx}{x^2 + px + q} = \frac{1}{2} A\, l(x^2 + px + q) - \frac{Ap}{2} \int \frac{dx}{x^2 + px + q}$$

$$\int \frac{(Ax + B)dx}{x^2 + px + q} = \frac{1}{2} A\, l(x^2 + px + q) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dx}{x^2 + px + q} \cdots (4)$$

IV. Integration der irrationalen Functionen.

16.

Im Verhältniss zur Anzahl aller irrationalen Functionen giebt es nur sehr wenige, wo die Integration derselben direct möglich ist. Unter diesen wenigen sind die beiden:

$$\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \text{ und } \frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}}$$

die wichtigsten, wo nämlich sowohl der Potenz-, als auch der Wurzelexponent die Zahl 2 nicht überschreitet, und diese beiden werden wir hier nur integriren.

1. Um die erste Function zu integriren, ist es am besten, die Wurzelgrösse durch Einführung einer neuen veränderlichen Grösse erst rational zu machen. Man setze zu dem Ende:

$$\sqrt{a+bx+cx^2} = u - x\sqrt{c}, \text{ so hat man:}$$

$$a+bx+cx^2 = u^2 - 2ux\sqrt{c} + cx^2, \text{ hieraus:}$$

$$b\,dx = 2u\,du - 2x\sqrt{c}\cdot du - 2u\sqrt{c}\cdot dx$$

$$(b+2u\sqrt{c})dx = 2\,(u - x\sqrt{c})\,du$$

$$\frac{dx}{u-x\sqrt{c}} = \frac{2\,du}{b+2u\sqrt{c}}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{du}{\frac{1}{2}b+u\sqrt{c}}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \int\frac{du}{\frac{1}{2}b+u\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\cdot l\,(u\sqrt{c}+\tfrac{1}{2}b)$$

oder für u seinen Werth gesetzt:

$$(1)\quad \int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\cdot l\left(\tfrac{1}{2}b+cx+\sqrt{c}\cdot\sqrt{a+bx+cx^2}\right)$$

2. Das Integral der andern Function könnte man ebenfalls durch rational machen derselben finden. Man thut aber jetzt besser, das Trinom in ein Binom zu verwandeln. Man setze deshalb:

$$a+bx-cx^2 = a+\frac{b^2}{4c} - \left(x\sqrt{c}-\frac{b}{2\sqrt{c}}\right)^2$$

setzt man noch $a+\frac{b^2}{4c} = m^2$ und $x\sqrt{c}-\frac{b}{2\sqrt{c}} = u$, mithin: $dx = \frac{1}{\sqrt{c}}\cdot du$, so hat man:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \int \frac{du}{\sqrt{m^2-u^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \text{Arc sin} \frac{u}{m}$$

und für u und m ihre Werthe gesetzt:

$$(2) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \text{Arc sin} \frac{2cx-b}{\sqrt{4ac+b^2}}$$

Nach diesen beiden Formeln hat man z. B.:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = l\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right); \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = l\left(x+\sqrt{x^2-1}\right);$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}} = \text{Arc sin} \frac{2x-a}{a} = \text{Arc cos} \frac{a-2x}{a}$$

Wäre in beiden Formeln $c=0$, so hat man unmittelbar nach der Fundamentalformel:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \int (a+bx)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{b}(a+bx)^{\frac{1}{2}}$$

V. Integration der Exponential- und logarithmischen Functionen.

17.

Nur in wenigen Fällen gelingt die Integration solcher Functionen durch Substitution oder durch theilweise Integration. Man hat z. B.:

1. $$\int x^n lx\, dx = \int lx \cdot x^n dx = lx \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int x^{n+1} \frac{dx}{x}$$

$$\int x^n lx\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(lx - \frac{1}{n+1}\right)$$

2. $$\int \frac{lx}{x} dx = \int lx \cdot \frac{dx}{x} = \int u \cdot du$$

$$\int \frac{lx}{x} dx = \tfrac{1}{2}u^2 = \tfrac{1}{2}(lx)^2$$

3. $$\int x^2 e^x dx = e^x(x^2-2x+2). \quad (\S\ 10.)$$

VI. Integration der goniometrischen Functionen.

18.

Hier muss man sich zuerst folgende sechs Integrale merken, auf welche alle übrigen Kreisfunctionen, wenn ihre Integration

überhaupt möglich ist, zurückgeführt werden müssen. Man hat zunächst:

$$1.\quad \int \sin x \cos x dx = \tfrac{1}{2}\sin^2 x$$

$$2.\quad \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = l \sin x$$

$$3.\quad \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -l \cos x$$

Diese drei Integrale erräth man leicht. Will man sie aber durch einen kleinen Kunstgriff finden, so setze man in (1) und (2) $\sin x = u$, mithin $\cos x\, dx = du$, so ist:

$$\int \sin x \cdot \cos x dx = \int u du = \tfrac{1}{2}u^2 = \tfrac{1}{2}\sin^2 x$$

$$\int \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x dx = \int \frac{1}{u} \cdot du = lu = l \sin x$$

$$\int \frac{1}{\cos x} \cdot \sin x\, dx = -\int \frac{1}{u} \cdot du = -lu = -l \cos x$$

Mehr Schwierigkeiten machen die folgenden drei Integrationen:

$$4.\quad \int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x} \cdot dx = \int \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right) dx$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = -l \cos x + l \sin x = l\, \frac{\sin x}{\cos x} = l \operatorname{tg} x$$

$$5.\quad \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2 \sin \frac{1}{2}x \cdot \cos \frac{1}{2}x}, \text{ setze } \tfrac{1}{2}x = \varphi, \text{ mithin } dx = 2 d\varphi$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{d\varphi}{\sin \varphi \cdot \cos \varphi} = l \operatorname{tg} \varphi = l \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}x$$

$$6.\quad \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin(\frac{\pi}{2} - x)} = -l \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \tfrac{1}{2}x\right) = l \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2}x\right)$$

19.

Die Integrale der manchmal vorkommenden Functionen $\sin^m x dx$, $\cos^m x dx$, findet man, wenn m eine ganze Zahl ist, am leichtesten, indem man die Potenzen von $\sin x$ und $\cos x$ erst durch dieselben trigonometrischen Functionen von Vielfachen des Bogens x ausdrückt.

So hat man z. B. (Analysis § 97):

$$\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2} \int (\cos 2x + 1)\, dx = \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{2} x$$

$$\int \cos^3 x\, dx = \frac{1}{4} \int (\cos 3x + 3 \cos x)\, dx = \frac{1}{12} \sin 3x + \frac{3}{4} \sin x$$

20.

Mit vorstehenden wenigen Integrationsregeln lässt sich schon viel anfangen und wir wollen deshalb auch, um den eigentlichen Zweck und Nutzen der Integralrechnung zu zeigen, mit diesen nöthigen Vorkenntnissen ausgerüstet, jetzt erst zu den mannigfaltigen Anwendungen übergehen. Diese müssen sich jedoch hier noch auf reine Geometrie beschränken, weil wir keine andere Wissenschaften, wie Mechanik, Physik etc. als bekannt voraussetzen dürfen. Wer jedoch die Anwendungen der Integralrechnung auf Geometrie gut versteht, der wird auch leicht ihre Anwendungen auf andere geeignete Wissenschaften verstehen.

Zweites Buch.

Quadratur ebener krummer Linien.

21.

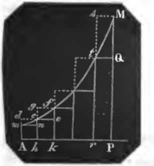
In der Analysis ist bemerkt, dass Leibnitz durch die Betrachtung der Zahlenreihen auf die Erfindung der Integralrechnung gekommen und (§ 2) dass er ein Integral als Summe unendlich kleiner Grössen und das Zeichen ∫ als Summationszeichen betrachtet. Um nun diese für die meisten ernsthaften Anwendungen der Integralrechnung höchst wichtige, für den ersten Anfänger aber etwas subtile Ansicht zum Verständniss zu bringen, möge erst Folgendes zur Vorbereitung dienen und die Ueberzeugung verschaffen, dass man die Flächen krummlinigt begrenzter Figuren nicht nur näherungsweise, sondern oftmals ganz genau bestimmen kann.

22.

Denkt man sich die krumme Linie gezeichnet, deren Gleichung,

$$y = a x^2 + b$$

ist, so kann man nach der Grösse der Fläche fragen, welche von einem Stück mM der krummen Linie, von den beiden Ordinaten mA, MP und dem Stück AP der Abscissenlinie begrenzt wird.



Sei A der Anfangspunct der Coordinaten und $AP = x$, so ist durch diese gegebene Abscisse und durch die Gleichung der krummen Linie die Grösse der fraglichen Fläche z gewiss bestimmt. Bevor wir jedoch zeigen, wie man sie durch Integralrechnung leicht findet, wollen wir erst folgende Methode anwenden.

Man denke sich die vom Anfangspunct abgemessene Abscisse $AP = x$ in n gleiche Theile getheilt, so dass $Ah = hk = \cdots\cdot = \frac{x}{n}$ ist, so giebt die gegebene Gleichung der krummen Linie, $y = ax^2 + b$, wenn man statt x nach und nach $\frac{1}{n}x = Ah$, $\frac{2}{n}x = Ak$, $\cdots$ $\frac{n}{n}x = AP$ setzt, die Ordinaten:

$$ch = a\left(\frac{1}{n}x\right)^2 + b;\ fk = a\left(\frac{2}{n}x\right)^2 + b; \cdots MP = a\left(\frac{n}{n}x\right)^2 + b.$$

. Multiplicirt man die Ordinate ch mit $Ah = \frac{x}{n}$, so erhält man das Rechteck $hcdA = \left[a\left(\frac{1}{n}x\right)^2 + b\right]\cdot\frac{x}{n}$; ebenso giebt fk mit $hk = \frac{x}{n}$ multiplicirt, das Rechteck $kfgh = \left[a\left(\frac{2}{n}x\right)^2 + b\right]\cdot\frac{x}{n}$ etc. Das letzte Rechteck $PMsr$ ist $= \left[a\left(\frac{n}{n}x\right)^2 + b\right]\cdot\frac{x}{n}$.

Die Summe aller dieser äussern Rechtecke ist gewiss grösser, als die fragliche Fläche z, in Zeichen:

$$z < \left[a\left(\frac{1x}{n}\right)^2 + b\right]\cdot\frac{x}{n} + \left[a\left(\frac{2x}{n}\right)^2 + b\right]\frac{x}{n} + \left[a\left(\frac{3x}{n}\right)^2 + b\right]\cdot\frac{x}{n} + \cdots + \left[a\left(\frac{nx}{n}\right)^2 + b\right]\cdot\frac{x}{n}$$

$$z < \frac{x}{n}\left[a\frac{x^2}{n^2}\left(1 + 4 + 9 + 16 + \cdots\cdot + n^2\right) + nb\right]$$

$$z < a\frac{x^3}{n^3}\left(1 + 4 + 9 + 16 + \cdots\cdot + n^2\right) + \frac{nbx}{n}$$

Nun ist aber die Summe der n ersten Quadratzahlen (Anal. §51)

$$= \frac{n \cdot n+1 \cdot 2n+1}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}, \text{ mithin:}$$

$$z < a\frac{x^3}{n^3}\left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) + bx$$

$$z < ax^3\left(\tfrac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right) + bx \cdots\cdots\cdots \cdot (1)$$

Multiplicirt man dagegen mit $\frac{x}{n}$ die 1ste, 2te $\cdots\cdots$ vorletzte Ordinate, so erhält man die kleinern innern Rechtecke:

$$Amnh = \left[a\left(\frac{0}{n}x\right)^2 + b\right]\frac{x}{n}; hkec = \left[a\left(\frac{1}{n}x\right)^2 + b\right]\cdot\frac{x}{n}; \cdot\ rPQl = \left[a\left(\frac{n-1}{n}x\right)^2 + b\right]\frac{x}{n},$$

deren Summe gewiss kleiner, als die fragliche Fläche z ist, in Zeichen:

$$z > a\frac{x^3}{n^3}\left(1 + 4 + 9 + 16 + \cdots + (n-1)^2\right) + bx$$

Die Summe der $n-1$ ersten Quadratzahlen ist nun aber

$$= \frac{(n-1)\ n \cdot (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}, \text{ mithin ist:}$$

$$z > ax^3\left(\tfrac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right) + bx \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

Die zu findende Fläche z liegt also zwischen den beiden Ausdrücken (1) und (2). Die Grösse eines jeden hängt von der Zahl n ab. Je grösser man n nimmt, d. h. in je mehr gleiche Theile man die Abscisse $AP = x$ theilt, je schmäler werden die in (1) und (2) summirten Rechtecke. So lange jedoch n als eine bestimmte, wenn auch noch so grosse Zahl gedacht wird, so lange werden beide Ausdrücke (1) und (2) von der gesuchten Grösse z etwas, wenn auch noch so wenig abweichen. Lässt man aber n immerfort wachsen, so werden beide fragliche Summen, wovon die eine zu gross, die andere zu klein ist, sich einer und derselben festen Grenze immerfort nähern und sie für $n = \infty$ wirklich erreichen. Beide Ausdrücke (1) und (2) geben also, indem man $n = \infty$ setzt und beachtet, dass dann $\pm\frac{1}{2n}$ und also

auch $\frac{1}{6n^2}$ verschwinden, in völliger Strenge die gesuchte Fläche

$$z = a \cdot \frac{x^3}{3} + bx$$

Wäre z. B. $a = \frac{1}{10}$; $b = 2$, mithin $y = \frac{1}{10}x^2 + 2$ und also $z = \frac{1}{10} \cdot \frac{x^3}{3} + 2x$, so wäre z. B. für $x = 10'$, $z = 53\frac{1}{3}\square'$.

23.

Nach der gefundenen Formel:

$$z = \frac{1}{10} \cdot \frac{x^3}{3} + 2x$$

kann man also, sich von A an beliebig weit nach der positiven Seite der x erstreckenden Flächenstücke berechnen. Soll aber die zu berechnende Fläche nicht bei A, sondern bei k anfangen, so muss man von dem für z erhaltenen Ausdruck die Fläche, welche derselbe für $x = Ak$ giebt, subtrahiren oder als eine Constante mit dem minus-Zeichen hinzufügen. Wäre z. B. $Ak = 4$, so wäre die Fläche $Akf = \frac{1}{10} \cdot \frac{4^3}{3} + 2 \cdot 4 = 10\frac{2}{15}$, mithin:

$$z = \frac{1}{10} \cdot \frac{x^3}{3} + 2x - 10\frac{2}{15}.$$

Setzt man jetzt für x beliebige Werthe, so erhält man jedesmal eine von $x = 4$, d. h. von der Ordinate fk abgerechnete Fläche. Setzt man $x = AP = 10'$, so erhält man die Fläche $fkPM = 53\frac{1}{3} - 10\frac{2}{5} = 42\frac{14}{15}\square'$. Setzt man $x = 4$, so kommt $z = 0$, weil ja die Fläche für $x = 4$ anheben, also für diesen Werth von x, Null sein soll.

24.

Wäre $y = ax^3 + bx^2 + cx + e$ die Gleichung einer krummen Linie, so würde man auf dieselbe Weise wie vorhin, für die vom Anfangspunct der Coordinaten aus zu berechnende Fläche z die Formel $z = a \cdot \frac{x^4}{4} + b \cdot \frac{x^3}{3} + c\frac{x^2}{2} + ex$ gefunden haben, weil (Analysis § 51) die Summe der n ersten Cubikzahlen $= \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}$ etc. Ebenso liesse sich leicht

zeigen, dass wenn allgemein $y = a + bx + cx^2 + \cdots + px^m$ die Gleichung einer krummen Linie und m eine ganze Zahl wäre, dann für die vom Anfangspunct der Coordinaten aus zu berechnende Fläche z, die Formel: $z = ax + b\frac{x^2}{2} + c\cdot\frac{x^3}{3} + \cdots + p\cdot\frac{x^{m+1}}{m+1}$ strenge richtig ist. Ferner, wenn die Gleichung einer krummen Linie eine solche Function wäre, die sich in eine nach ganzen positiven Potenzen der veränderlichen Grösse fortschreitenden convergenten Reihe verwandeln lässt, die entsprechende Fläche durch Summation der arithmetischen Reihen bestimmt werden könnte. Wäre z. B.:

$$y = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots \text{ so wäre:}$$

$$z = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots \text{ oder:}$$

$$z = e^x - 1$$

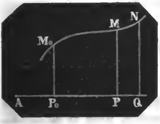
25.

Die in den vorhergehenden Paragraphen durch Summation arithmetischer Reihen bewirkte Quadraturen führten leicht auf die nahe liegende Bemerkung, dass man die Flächen aller solcher Curven, deren Gleichung eine **ganze** Function von x ist, ohne Summation erhalten kann, indem man die ganze Function mit dem Differential der Abscisse multiplicirt und dann integrirt. So ist z.B., wenn $y = ax^2 + b$ ist, die Fläche $z = \int (ax^2 + b)dx = a\cdot\frac{x^3}{3} + bx$, ganz wie vorhin. Dies führte nun weiter zu der Frage: Kann man wohl in allen Fällen, wenn $y = f(x)$ die gesonderte, sonst beliebige Gleichung einer krummen Linie ist, $f(x)\cdot dx$ als das Differential der Fläche und mithin das Integral $\int f(x)dx$ als die Fläche selbst betrachten? Man fand, dass dies behauptet werden darf und hat dafür verschiedene Beweise gefunden, von denen wir zwei mittheilen wollen. Den ersten nach der Grenzmethode, den andern nach der Infinitesimalmethode.

26.

Erster Beweis. Kann man das Differential (die Fluxion) der unbekannten Function einer zu berechnenden veränderlichen (fliessenden) Grösse (Fläche, Linie, Körper etc.) finden, so hat

man offenbar durch Integration auch die unbekannte Function selbst. Um nun einzusehen, dass das Differential einer von der bestimmten Abscisse $AP_0 = x_0$ anhebenden und sich zu bis zu der unbestimmt gelassenen Abscisse $AP = x$ erstreckenden Fläche $M_0P_0PM = z$, gleich ist dem Product aus der End-Ordinate $MP = y$ und dem Differential der Abscisse dx, sei allgemein:



$$y = f(x)$$

die Gleichung *) der krummen Linie.

Zuvörderst ist nun klar, dass die gesuchte Fläche z durch die Abscissen x_0, x völlig bestimmt, also nothwendig irgend eine Function von x ist.

Um, worauf es zunächst ankommt, das Differential dieser Function zu finden, möge $AP = x$ sich um $PQ = \Delta x$ ändern, wodurch die Fläche z um $PQNM = \Delta z$ wächst. Dieses Wachsthum Δz lässt sich durch ein Rechteck darstellen, dessen Grundlinie $= \Delta x$ und dessen Höhe eine von den zwischen $MP = y$ und $NQ = y + \Delta y$ liegenden Ordinaten, also $= y + \varepsilon$ ist, und wo ε, je nachdem die Ordinaten wachsen oder abnehmen, eine positive oder negative, jedoch mit Δx zugleich verschwindende Grösse ist, so dass also die kleine trapezförmige Fläche $MPQN = \Delta z$ dargestellt werden kann, durch:

$$\Delta z = (y + \varepsilon)\,\Delta x = [f(x) + \varepsilon]\,\Delta x$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = y + \varepsilon = f(x) + \varepsilon$$

Lassen wir jetzt, um aus diesen Differenzen-Quotienten den Differentialquotienten (die Derivirte von z) zu erhalten, Δx bis zu Null abnehmen, so verschwindet auch ε und wir haben:

$$\frac{dz}{dx} = y = f(x)$$

*) Wir setzen hier, wie immer, voraus, dass $f(x)$ und ihre Derivirten sowohl für die Endwerthe x_0, x, als auch für alle dazwischen liegenden Werthe continuirlich ist, so wie auch, dass zu jeder Abscisse nur eine Ordinate gehört und kein Zeichenwechsel Statt findet.

und hieraus zunächst das fragliche Differential der gesuchten Fläche z nämlich:

$$dz = ydx = f(x) \cdot dx$$

und folglich durch Integration:

$$z = \int ydx = \int f(x)dx$$

27.

Hat man das Integral $\int f(x)dx$, welches wir mit $F(x)$ bezeichnen wollen, gefunden, so muss man demselben, wenn es für $x = x_0$, wo es anheben soll, nicht von selbst verschwindet, sondern $F(x_0) =$ einer constanten Grösse c wird, noch diese Constante mit dem minus-Zeichen hinzufügen, oder was auf dasselbe führt: Ist $F(x)$ die Function, deren Differential $= f(x)dx$, so ist auch:

$$z = F(x) + c$$

Soll nun für $x = x_0$ das Integral anheben, $z = 0$ sein, so muss die Constante so beschaffen sein, dass

$$0 = F(x_0) + c$$

also $c = -F(x_0)$ sein, daher:

$$z = F(x) - F(x_0)$$

Beispiel 1. Wäre $y = \frac{1}{10}x^2 + 2$ die Gleichung einer krummen Linie, so wäre $z = \frac{1}{10}\frac{x^3}{3} + 2x + c$.

Soll das Integral von $x = 0$ anheben, so ist die Constante $c = 0$, weil für $x = 0$, auch $z = 0$. Soll dagegen das Integral von $x = 4$ anheben, so hat man zur Bestimmung der Constante $0 = \frac{1}{10} \cdot \frac{4^3}{3} + 2 \cdot 4 + c$, woraus $c = -10\frac{2}{15}$ und man hätte für die von $x = 4$ anhebende Fläche: $z = \frac{1}{10} \cdot \frac{x^3}{3} + 2x - 10\frac{2}{15}$.

Beispiel 2. Wäre $y = e^x$ die Gleichung der krummen Linie, so wäre:

$$z = \int e^x dx$$

$$z = e^x + c \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

Soll die Fläche von $x = 0$ anheben, also für $x = 0$ auch $z = 0$ sein, so hat man:

$$0 = 1 + c \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

Subtrahirt man (2) von (1), so wird die Constante c eliminirt und man hat für die von $x = 0$ anhebende Fläche:

$$z = e^x - 1$$

28.

Die Nothwendigkeit, einem gefundenen Integral eine unbestimmte Constante hinzuzufügen, liegt also einfach darin, damit dasselbe ein allgemeines wird und durch richtige Bestimmung der Constante, für einen beliebigen Werth der veränderlichen Grösse anheben kann.

29.

Um anzudeuten, dass ein Integral $\int f(x)dx$ für einen bestimmten Werth x_0 der veränderlichen Grösse anheben und dann bis zu einem andern bestimmten Werth x sich erstrecken soll, schreibt man so:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$$

und um das Integral innerhalb dieser Grenzen x_0 und x zu bestimmen, sucht man erst das allgemeine Integral, setzt darin statt x einmal x_0 und dann x und subtrahirt das erste Resultat von dem zweiten, so dass, wenn $F(x) + c$ das allgemeine Integral von $f(x)dx$ bedeutet:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = F(x_1) - F(x_0)$$

Anmerkung. Es ist wohl klar, dass bei allen Integrationen innerhalb bestimmter Grenzen die Constante gleich anfangs weggelassen werden kann, indem doch immer $F(x_1) + c - [F(x_0) + c] = F(x_1) - F(x_0)$ ist.

30.

Sind die Grenzen eines Integrals angegeben, so ist und heisst dasselbe ein bestimmtes Integral. Sind die Grenzen nicht angegeben, so ist und heisst dasselbe ein unbestimmtes Integral und muss dann der Allgemeinheit und Vollständigkeit halber immer eine willkürliche (unbestimmte) Constante enthalten, über die man, bestimmter Zwecke halber, verfügen kann.

Ein unbestimmtes Integral ist z. B.:

$$\int (\tfrac{1}{15}x^2 + 2)\, dx = \tfrac{1}{15}\frac{x^3}{3} + 2x + c$$

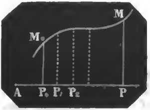
Ein bestimmtes Integral dagegen ist:

$$\int_4^{10} (\tfrac{1}{15}x^2 + 2)\, dx = \tfrac{1}{15} \cdot \frac{10^3}{3} + 2 \cdot 10 - \left(\tfrac{1}{15} \cdot \frac{4^3}{3} + 2 \cdot 4\right) = 42\tfrac{4}{5}$$

Aus dem unbestimmten (allgemeinen) Integral kann jedes bestimmte abgeleitet werden, vorausgesetzt jedoch, dass der Factor von dx innerhalb der fraglichen Grenzen stetig ist.

31.

* Zweiter Beweis. Um noch zu zeigen, dass man nach der Infinitesimalmethode ein bestimmtes Integral $\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$, als die Summe einer unendlichen Reihe unendlich kleiner Grössen und die Integration selbst als eine abgekürzte Summation betrachten kann, sei allgemein:



$$y = f(x)$$

die gegebene Gleichung einer krummen Linie und die von $AP_0 = x_0$ bis $AP = x$ sich erstreckende Fläche $M_0P_0PM = z$ gesucht.

Man denke sich das Stück der Abscissenlinie $P_0P = x - x_0$ in n gleiche Theile getheilt und setze $\frac{x - x_0}{n} = \Delta x$, so sind die Abscissen der Theilpuncte P_0, P_1, $P_2 \cdots\cdots P$ beziehlich $= x_0$, $x_0 + \Delta x$, $x_0 + 2\Delta x, \cdots\cdots$ $x_0 + (n-1)\Delta x$, $x_0 + n\Delta x$ und die dazu gehörigen Ordinaten beziehlich $= f(x_0), f(x_0 + \Delta x), f(x_0 + 2\Delta x \cdots\cdots f[x_0 + (n-1)\Delta x]$, $f(x_0 + n\Delta x)$, mithin die Summen S_1 und S_2 der Rechtecke, indem man einmal von der ersten und einmal von der letzten Ordinate ausgeht:

$$S_1 = f(x_0) \cdot \Delta x + f(x_0 + \Delta x) \cdot \Delta x + \cdots\cdots + f[x_0 + (n-1)\Delta x) \cdot \Delta x$$
$$S_2 = f(x_0 + \Delta x) \cdot \Delta x + f(x_0 + 2\Delta x) \cdot \Delta x + \cdots\cdots + f(x_0 + n\Delta x) \cdot \Delta x$$

Je kleiner nun Δx oder je grösser n ist, je näher kommt jede dieser beiden Summen, wovon (im Allgemeinen) die eine zu

klein, die andere zu gross ist, einer und derselben nicht zu überschreitenden Grenze z. Um nun einzusehen, dass das bestimmte Integral $\int_{x0}^{x} f(x)dx$ ganz dasselbe, wie die erwähnte Grenze z (nämlich für $n = \infty$) ist, sei $F(x) + c$ das gefundene unbestimmte Integral, so dass $F(x) + c = \int f(x)dx$, mithin $F'(x)dx = f(x)dx$, so hat man (Differ.-Rechn. § 46):

$$F(x + \Delta x) = F(x) + F'(x)\Delta x + F''(x)\frac{\Delta x^2}{1 \cdot 2} + F'''(x)\frac{\Delta x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots\dots$$

oder, weil $F'(x) = f(x)$, mithin $F''(x) = f'(x)$ etc.

$$F(x + \Delta x) - F(x) = f(x)\Delta x + f'(x) \cdot \frac{\Delta x^2}{1 \cdot 2} + f''(x)\ \frac{\Delta x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots\dots$$

oder, wenn man:

$$\left(\frac{1}{1 \cdot 2} f'(x) + f''(x) \cdot \frac{\Delta x}{1 \cdot 2 \cdot 3} + f'''(x) \cdot \frac{\Delta x^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots\right)\Delta x^2 = \varepsilon_1 \cdot \Delta x^2$$

setzt:

$$F(x + \Delta x) - F(x) = f(x)\Delta x + \varepsilon_1 \Delta x^2$$

Setzen wir nun in dieser Gleichung statt x nach und nach x_0, $x_0 + \Delta x$, $x_0 + 2\Delta x, \cdots x_0 + (n-1)\Delta x$, so kommen folgende Gleichungen:

$$F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) = f(x_0)\Delta x + \varepsilon_1 \Delta x^2$$

$$F(\overline{x_0 + \Delta x} + \Delta x) - F(x_0 + \Delta x) = f(x_0 + \Delta x) \cdot \Delta x + \varepsilon_2 \Delta x^2$$

$$F(\overline{x_0 + 2\Delta x} + \Delta x) - F(x_0 + 2\Delta x) = f(x_0 + 2\Delta x) \,.\, \Delta x + \varepsilon_3 \Delta x^2$$

$$\vdots$$

$$F\left(\overline{x_0 + (n-2)\Delta x} + \Delta x\right) - F\left(x_0 + (n-2)\Delta x\right) = f\left(x_0 + (n-2)\Delta x\right) . \Delta x + \varepsilon_{n-1} \Delta x^2$$

$$F\left(\overline{x_0 + (n-1)\Delta x} + \Delta x\right) - F\left(x_0 + (n-1)\Delta x\right) = f\left(x_0 + (n-1)\Delta x\right)\Delta x + \varepsilon_n \Delta x^2$$

Diese Gleichungen addirt und beachtet, dass auf der linken Seite jedes erste Glied einer Gleichung durch das 2te Glied der folgenden getilgt wird, hat man:

$$F(x_0 + n\Delta x) - F(x_0) = f(x_0) \cdot \Delta x + f(x_0 + \Delta x) \cdot \Delta x + \cdots + f(x_0 + (n-1)\Delta x) \cdot \Delta x$$
$$+ (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \cdots + \varepsilon_n)\Delta x^2$$

Aus $\frac{x-x_0}{n} = \Delta x$ folgt $x_0 + n\Delta x = x$, mithin, wenn man noch $\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\cdots+\varepsilon_n=e$ setzt:

$$F(x)-F(x_0)=f(x_0)\Delta x+f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x+\cdots+f(x_0+(n-1)\Delta x)\cdot\Delta x+e\Delta x^2$$

32.

* Weil nun, wie angenommen, $F(x)+c$ das allgemeine Integral von $f(x)dx$, mithin $F(x)-F(x_0)$ das von x_0 anbebende und sich bis x erstreckende bestimmte Integral von $f(x)dx$ nämlich $=\int_{x_0}^{x} f(x)dx$ ist, so sieht man, dass wenn für n eine bestimmte, wenn auch noch so grosse Zahl, mithin auch ein bestimmtes, wenn auch noch so kleines Δx angenommen wird, doch strenge genommen keinesweges

$$\int_{x_0}^{x} f(x)dx=f(x_0)\Delta x+f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x+\cdots+f[x_0+(n-1)\Delta x]\Delta x$$

gesetzt werden kann, weil rechter Hand das, wenn auch noch so kleine Glied, $e\Delta x^2$, fehlt.

Wohl aber kann man sagen, dass für ein sehr kleines bestimmtes Δx das bestimmte Integral linker Hand näherungsweise der Summe rechter Hand gleich ist, indem das fehlende Glied $e\Delta x^2$ dann sehr klein wird, und es ist auch klar, dass die Summe einer festen Grenze, nämlich der gesuchten Fläche z, desto näher kömmt, je grösser man n, oder je kleiner man Δx annimmt.

Wollte man, um die Grenze zu erreichen, $\Delta x=0$ annehmen, so würde allerdings $e\Delta x^2$ verschwinden, gleichzeitig aber auch alle übrigen Glieder, und das linker Hand stehende Integral wäre dann gleich einer Summe von lauter Nullen, was ungereimt ist.

Will man also die, der vielfachen Anwendungen halber äusserst fruchtbare und bequeme ursprüngliche Vorstellung, dass ein Integral in aller Strenge genommen eine Summe oder die Grenze einer Summe sei, nicht aufgeben, so sehen wir uns hier wiederum gezwungen, auch die alte Vorstellung von unendlich kleinen Grössen zuzulassen. Denkt man sich dann n unendlich gross, also Δx unendlich klein (ein Element der Abscissenlinie) welches wir in diesem verschwindenden Zustand mit dx bezeichnen wollen, so muss, weil dx, ohne völlig zu verschwinden, nicht mehr

kleiner werden kann, das fehlende Glied $\epsilon dx^2 = 0$ sein (Differ.-Rechn. § 55) und man hat wirklich, weil dann auch $n-1=n=\infty$

$$\int_{x_0}^{x} f(x)dx = f(x_0)dx + f(x_0+dx)\,dx + \cdots + f(x)dx$$

So aufgefasst, ist das bestimmte Integral gleich der Summe aller stetig auf einander folgenden Differentialen. (Elementen.)

33.

Aufgabe 1. Die Parabel zu quadriren, deren Gleichung:

$$y^2 = px$$

Auflösung. Man hat hier:

$$z = \int y dx = \int p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} \cdot dx = \tfrac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{3}{2}} + c$$

Soll die Fläche vom Scheitel anheben, also für $x = 0$ auch $z = 0$ sein, so ist $c = 0$, daher

$$z = \tfrac{2}{3} x\sqrt{px} = \tfrac{2}{3} \cdot xy$$

Anmerkung. Man kann auch, wenn es unter Umständen leichter ist, so rechnen:

Aus der Gleichung der Parabel folgt: $dx = \frac{2ydy}{p}$, mithin hat man auch, alles durch y ausgedrückt:

$$z = \int y dx = \frac{2}{p} \int y^2 dy = \tfrac{2}{3} \frac{y^3}{p} = \tfrac{2}{3} xy$$

wo, wenn das Integral im Scheitel anheben soll, keine Constante nöthig ist, indem für $y = 0$, von selbst auch $z = 0$ ist.

34.

Aufgabe 2. Die Fläche der Ellipse zu finden, deren Gleichung:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Auflösung. Man hat hier:

$$z = \frac{b}{a} \int \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx, \text{ oder:}$$

$$\frac{az}{b} = \int \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx$$

Das Integral kann man auf verschiedene Weise finden:

1. Cauchy setzt: $\sqrt{a^2 - x^2} = tx$, woraus $x^2 = \frac{a^2}{1+t^2}$, dann ist (§ 9):

$$\frac{az}{b} = \int t \cdot x dx = t \cdot \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}\int x^2 dt$$

$$\frac{az}{b} = \tfrac{1}{2}tx^2 - \tfrac{1}{2}\int \frac{a^2}{1+t^2} dt$$

$$\frac{az}{b} = \tfrac{1}{2}tx^2 - \tfrac{1}{2}a^2 \operatorname{Arc} tg\, t$$

und wenn für t sein Werth $\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$ zurückgesetzt wird:

$$z = \tfrac{1}{2}\frac{bx}{a}\sqrt{a^2 - x^2} - \tfrac{1}{2}ab \operatorname{Arc tg} \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} + C$$

Soll die Fläche bei CD anheben, also für $x = 0$ auch $z = 0$ sein, so hat man, weil Arc $(\text{tg} = \infty) = \frac{1}{2}\pi$

$$0 = 0 - \tfrac{1}{2}ab \cdot \tfrac{1}{2}\pi + C$$

Diese Gleichung von voriger subtrahirt (§ 27, Beispiel 2):

$$z = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{b}{a} x\sqrt{a^2 - x^2} + \tfrac{1}{2}ab\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arc tg} \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right)$$

Ist, im ersten Quadranten, die tangente eines Bogens $= \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$, so ist, wie leicht einzusehen, die tangente des Bogens der ersteren zu einem ganzen Quadranten $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ergänzt, $= \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, so dass also:

$$\operatorname{Arc tg} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \operatorname{Arc tg} \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} = \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{Arc tg} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arc tg} \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$$

Dies substituirt, ist auch:

$$z = \tfrac{1}{2}\frac{b}{a}x\sqrt{a^2 - x^2} + \tfrac{1}{2}ab \operatorname{Arc tg} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

oder auch (Trigon. § 100, 5):

$$z = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{a} x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2} ab \sin \frac{x}{a} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

Man kann also ein und dasselbe Integral oftmals unter verschiedenen Formen darstellen. Man hätte statt des sinus auch den cosinus oder die cotangente hineinbringen können.

2. Um das Integral

$$z = \frac{b}{a} \int \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx$$

zu finden, kann man auch so verfahren:

Man setze: $x = a \sin \varphi$, mithin $dx = a \cos \varphi \cdot d\varphi$, so ist:

$$z = ab \int \cos^2 \varphi d\varphi \text{ und } (\S 19)$$

$$z = \tfrac{1}{2} ab \int (\cos 2\varphi + 1) d\varphi$$

$$z = \tfrac{1}{2} ab \left(\frac{\sin 2\varphi}{2} + \varphi \right)$$

Aus der Annahme: $a \sin \varphi = x$, folgt, dass für $x = 0$ auch $\varphi = 0$ und für $x = a$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ist. Soll demnach das Integral von $x = 0$, also auch von $\varphi = 0$ anfangen, so ist keine Constante nöthig. Soll das Integral dann bis $x = a$ genommen werden, so muss man $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ setzen. In Zeichen:

$$z = \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx = \tfrac{1}{2} ab \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\cos 2\varphi + 1) d\varphi$$

Will man in dem gefundenen Integral

$$z = \tfrac{1}{2} ab \left(\frac{\sin 2\varphi}{2} + \varphi \right) \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

den Bogen φ wieder durch x ausdrücken, so folgt aus $a \sin \varphi = x$, dass $\varphi = \text{Arc} \sin \frac{x}{a}$ und aus $\sin \varphi = \frac{x}{a}$, dass $\cos \varphi = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$ mithin $\sin 2\varphi = \frac{2x\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2}$. (Trigon., § 100, 16).

Es ist daher:

$$z = \frac{1}{2} \frac{b}{a} x \sqrt{a^2 - x^2} + \tfrac{1}{2} ab \text{ Arc} \sin \frac{x}{a}$$

Für $x = 0$ ist $z = 0$. Setzt man $x = \frac{1}{2}a$, so hat man $z = \frac{ab\sqrt{3}}{8} + \frac{ab}{2} \cdot \frac{\pi}{6}$. Setzt man $x = a$, so hat man den vierten Theil der Ellipse $= \frac{1}{2}ab \cdot \frac{1}{2}\pi$. Die Fläche der ganzen Ellipse ist also

$$z = ab\pi$$

Anmerkung. Setzt man in dem für $x = 0$ verschwindenden Integral (1) $x = -a$, oder, was dasselbe ist, in dem für $\varphi = 0$ verschwindenden Integral (2), $\varphi = -\frac{1}{2}\pi$, so erhält man die Fläche des Quadranten ACD, jedoch negativ $(= -\frac{1}{4}ab\pi)$. Dies ist ganz natürlich, wenn man das Integral als Summe betrachtet, indem dann in der allgemeinen Summationsformel (§ 32) $\int_0^{-a} f(x)dx$, für positive Ordinaten, alle Glieder rechter Hand, wegen des negativen Factors $-dx$, negativ werden. Integrirt man aber von $x = -a$ bis $x = 0$, oder von $\varphi = -\frac{1}{2}\pi$ bis $\varphi = 0$, so erhält man dieselbe Fläche positiv. Integrirt man von $x = -a$ bis $x = +a$, oder von $\varphi = -\frac{1}{2}\pi$ bis $\varphi = +\frac{1}{2}\pi$, so erhält man die halbe Ellipse, in Zeichen:

$$\frac{b}{a}\int_{-a}^{+a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \tfrac{1}{2}ab\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} (\cos 2\varphi + 1)\, d\varphi = \tfrac{1}{2}ab\pi.$$

Dies (nämlich das Integral als Summe betrachtet), lehrt zugleich auch, dass man den zu einer trigon., positiven oder negativen Function gehörigen Bogen stets in der kürzesten positiven oder negativen Drehung nehmen muss und dass der Bogen hier nur als Zahlgrösse in Betracht kömmt.

35.

Aufgabe 3. Die Hyperbel zu quadriren, deren Gleichung:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

Auflösung. Man hat hier:

$$z = \frac{b}{a}\int \sqrt{x^2 - a^2} \cdot dx$$

Setze $\sqrt{x^2 - a^2} = tx$, also $x^2 = \frac{a^2}{1 - t^2}$, so ist:

$$\frac{az}{b} = \int t \cdot x dx = t \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int x^2\, dt$$

$$\frac{az}{b} = \frac{tx^2}{2} - \frac{a^2}{2}\int \frac{dt}{1-t^2} \text{ und } (\S\ 14)$$

$$\frac{2az}{b} = tx^2 - \frac{a^2}{2} l\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$$

$$z = \frac{bx}{2a}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{ab}{4} l\left(\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{x-\sqrt{x^2-a^2}}\right)$$

$$z = \frac{bx}{2a}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{ab}{4} l\left(\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right)^2$$

$$z = \frac{bx}{2a}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{ab}{2} l\left(\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right)$$

Soll die Fläche für $x = a$ (im Scheitel B) anheben, so ist keine Constante nöthig, weil das Integral für $x = a$ von selbst verschwindet.

Anmerkung. Zieht man vom Mittelpunct C nach dem Endpunct M der Ordinate $MP = y$, die Grade CM, so ist die Sectorfläche:

$$MCB = \tfrac{1}{2}xy - z, \text{ oder}$$

$$MCB = \frac{ab}{2} l\left(\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right)$$

Wird $x = \infty$, so wird CM zur Asymptote und man sieht, dass die zwischen der Asymptote und dem Hyperbelast liegende Fläche unendlich wird.

36.

Aufgabe 4. Die Quadratur der Hyperbel zu finden, deren Asymptoten-Gleichung:

$$y = \frac{a^2}{x}$$

Auflösung. Es ist hier:

$$z = a^2 \int \frac{dx}{x}$$

$$z = a^2\, lx + c$$

Soll die Fläche bei A anheben, also für $x = 0$ auch $z = 0$ sein, so ist, weil $l0 = -\infty$,

$$0 = -\infty + c$$

subtrahirt man diese Gleichung von der vorhergehenden, so ist:

$$z = a^2 lx + \infty \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

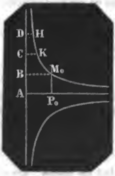
Man sieht hier, dass die Constante auch unendlich sein kann. Soll die Fläche sich von $x = 0$ bis $AP = x_0$ erstrecken, so ist:

$$z = a^2 lx_0 + \infty \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

Für $x_0 = 0$ ist $z = 0$; für $x_0 = 1$ ist $z = \infty$. Es ist also, was wir schon aus vorhergehendem § wissen, die zwischen der Asymptote Ay und dem unendlichen Hyperbelast liegende Fläche unendlich gross. Will man die Fläche von $AP = x_0$ bis $AP = x$ haben, so ist (2) von (1) subtrahirt:

$$M_0P_0PM = a^2 (lx - lx_0) = a^2 l\left(\frac{x}{x_0}\right)$$

37.



Aufgabe 5. Die Linie zu quadriren, deren Gleichung:

$$y = \frac{4}{\sqrt{x}}$$

Auflösung. Die Ordinatenachse sowohl, als die positive Seite der Abscissenachse sind Asymptoten. Für die, oberhalb der Abscissenachse (für positive Ordinaten) liegende Fläche hat man hier:

$$z = \int \frac{4}{\sqrt{x}} dx = 4 \int x^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$z = 8x^{\frac{1}{2}}$$

Soll die Fläche von $x = 0$ anheben, so braucht keine Constante hinzugefügt zu werden, weil das Integral für $x = 0$ von selbst verschwindet.

Nimmt man hier z. B. $x = 9' = AP_0$, so wird $z = 24\square'$.

Es scheint ungereimt zu sein, eine Fläche, die sich in's Unendliche erstreckt (nicht völlig begrenzt ist), berechnen zu wollen. Die Möglichkeit ergiebt sich jedoch, wenn man die Sache aus folgendem Gesichtspunct betrachtet: Man denke sich auf der Asymptote AY gleiche Stücke abgesteckt, AB = BC = CD = etc., so bilden hier die unzähligen Flächenstücke ABM_0P_0, $BCKM_0$ etc. eine unendliche aber convergente Reihe, deren Summe genau $= 8x^{\frac{1}{2}}$ ist. Dies war vorhin bei der Hyperbel (§ 36) nicht der Fall, wie es auch hier für die andere Asymptote AX nicht der Fall ist: denn für $x = \infty$ ist auch $z = \infty$.

38.

Aufgabe 6. Die Quadratur der Exponentiallinie zu finden, deren Gleichung:

$$y = e^x$$

Auflösung. Es ist hier: $z = \int e^x dx$, oder:

$$z = e^x + c \cdots\cdots \quad \cdots\cdots\cdots \cdot (1)$$

Soll die Fläche bei A anheben, so muss für $x = 0$ auch $z = 0$ sein. Dies giebt zur Bestimmung der Constante:

$$0 = 1 + c \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

Mithin (2) von (1) subtrahirt:

$$z = e^x - 1$$

Setzt man $x = -\infty$, so findet man die zwischen der Asymptote, Ordinate AB und dem unendlichen Curvenast liegende Fläche als eine endliche Grösse, jedoch negativ, nämlich $= -1\,\square$ (§ 34, Anmerkg.).

Integrirt man von $x = -\infty$ bis $x = 0$, in Zeichen:

$$z = \int_{-\infty}^{0} e^x dx = e^0 - e^{-\infty}$$

so erhält man dieselbe Fläche positiv, nämlich: $z = 1\,\square$. Dasselbe erhält man für die Exponentiallinie $y = e^{-x}$ und für das bestimmte Integral:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$$

39.

Aufgabe 7. Die Cycloide zu quadriren.

Auflösung. Zufolge Diff.-Rechnung § 137 hat man:

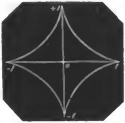
$$x = r\theta - r\sin\theta$$
$$y = r - r\cos\theta$$
$$dx = r(1-\cos\theta)\,d\theta$$
$$z = r^2\int(1-\cos\theta)^2 d\theta$$
$$z = r^2\int(1-2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta$$
$$z = r^2\int(\tfrac{3}{2}-2\cos\theta+\tfrac{1}{2}\cos 2\theta)d\theta$$
$$z = r^2(\tfrac{3}{2}\theta - 2\sin\theta + \tfrac{1}{4}\sin 2\theta)$$

Soll das Integral von $x = 0$ oder $\theta = 0$ anheben, so ist keine Constante nöthig. Setzt man $\theta = 2\pi$, so hat man die ganze Fläche der Cycloide, nämlich:

$$z = 3r^2\pi$$

Die Fläche der Cycloide ist also just drei Mal so gross, als die Fläche des Erzeugungskreises.

40.



Aufgabe 8. Die krumme Linie zu quadriren, deren Gleichung $y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}} = 1$, oder:

$$y = (1-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$$

Auflösung. Es ist:

$$z = \int_0^1 (1-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} dx$$

oder, wenn man, nach Cauchy, $x = \sin^3\theta$, mithin $dx = 3\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta$ setzt, so ist auch:

$$z = 3\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2\theta\cdot\cos^4\theta\,d\theta$$
$$z = 3\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\cos^4\theta - \cos^6\theta)d\theta \text{ und } (\S\ 19)$$

$$z = 3 \cdot \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{8}\cos 4\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{3}{8} \\ -(\frac{1}{32}\cos 6\theta + \frac{3}{16}\cos 4\theta + \frac{15}{32}\cos 2\theta + \frac{5}{16}) \end{array} \right\} d\theta$$

Anmerkung. Man sieht hier (und in ähnlichen Fällen) leicht ein, dass man für die angegebenen Grenzen, von der Entwickelung der Potenzen $\cos^4\theta$, $\cos^6\theta$, nur die constanten Glieder $\frac{3}{8} - \frac{5}{16} = \frac{1}{16}$ mit $d\theta$ zu multipliciren und zu intregriren braucht, indem die Intregrale aller übrigen Glieder lauter sinus von geraden Vielfachen von θ geben, welche deshalb, sowohl für $\theta = 0$, als auch für $\theta = \frac{1}{2}\pi$ doch verschwinden. Das gesuchte Integral ist also $= \frac{3}{16} \cdot \frac{\pi}{2}$, mithin die ganze Fläche für alle vier Quadranten: $z = \frac{3}{8}\pi$.

41.

Man muss bei jeder Quadratur einer krummen Linie, wenn man keine negativen Flächen gestatten will, den Lauf der Linie kennen, namentlich ob und wo sie die Abscissenlinie schneidet. Denn sind die Ordinaten negativ, so müssen, vermöge der allgemeinen Summationsformel (§ 32), für positive Abscissen alle Factoren von dx negativ werden. Man muss deshalb jedes oberhalb und unterhalb der Abscissenachse liegende Flächenstück besonders berechnen, also von Durchschnittspunct zu Durchschnittspunct integriren, die mit dem minus-Zeichen behafteten Flächenstücke als positiv betrachten und alles addiren.

42.

Aufgabe 9. Die parabolische Linie zu quadriren, deren Gleichung:

$$y = x^3 - 9x^2 + 23x - 15$$

Auflösung. Diese Gleichung lässt sich (die rechte Seite in Factoren zerlegt, Anal. § 116) auch so schreiben:

$$y = (x - 1)(x - 3)(x - 5)$$

Aus dieser Form erkennt man nun leichter, dass für alle Werthe von x zwischen 0 und 1 die Ordinaten negativ, zwischen 1 und 3 positiv, zwischen 3 und 5 negativ und für 1, 3, 5 Null sind. (S. Fig. Differ.-Rechn. § 104.)

Soll nun die Fläche von $x=1$ bis $x=5$ berechnet werden, in Zeichen:

$$z=\int_{x=1}^{x=5} y\,dx$$

so muss man des § 41 beregten Umstandes halber das Integral hier in zwei Theile zerlegen und so schreiben:

$$z=\int_{x=1}^{x=3} y\,dx+\int_{x=3}^{x=5} y\,dx$$

Weil nun das allgemeine Integral

$$z=\frac{x^4}{4}-3x^3+\frac{23}{2}x^2-15x+c$$

so ist für $x=1$, $z_1=-6\frac{1}{4}+c$; für $x=3$ ist $z_2=-2\frac{1}{4}+c$, mithin das von $x=1$ bis $x=3$ oberhalb der Abscissenlinie liegende Flächenstück $z_2-z_1=4\square$.

Setzt man $x=5$, so ist $z_3=-6\frac{1}{4}+c$, mithin das unterhalb liegende Flächenstück $=z_3-z_2=-4\square$. Es ist mithin (§ 41) die arithmetische Summe beider Flächen $z=8\square$.

Hätte man den Lauf der krummen Linie nicht berücksichtigt und das Integral gleich von $x=1$ bis $x=5$ genommen, so hätte man $z=0$ erhalten.

43.

Aufgabe 10. Die logarithmische Linie zu quadriren, deren Gleichung:

$$y=a\cdot lx$$

Auflösung. Man hat hier:

$$z=a\int lx\,dx \text{ und (§ 9)}$$

$$z=ax\,lx-ax+c$$

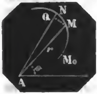
Soll die Fläche von $x=0$ anheben, so ist die Constante $c=0$ (Differ.-Rechn. § 66), daher:

$$z=ax\,(lx-1)$$

Von $x=0$ bis $x=1$ ist die Fläche eine endliche Grösse, jedoch wegen der negativen Ordinaten, mit dem Minus-Zeichen behaftet, $=-a$.

44.

Um schliesslich auch noch Polarcurven zu quadriren, kommt es zunächst darauf an, aus der Gleichung der Polarcurven einen Ausdruck für das Differential der Fläche zu finden.



Sei zu dem Ende die Gleichung der Polarcurve ganz allgemein:

$$r = f(\theta)$$

Lässt man den mit der Längeneinheit beschriebenen Bogen θ um $\Delta\theta$ wachsen, so wächst der radius vector r um NQ $= \Delta r$*) und es ist der mit AM $= r$ beschriebene Kreisbogen $\widehat{MQ} = r\Delta\theta$. Nimmt man $\Delta\theta$ sehr klein, so kann man näherungsweise AMN als ein Dreieck betrachten, worin AN $= r + \Delta r$ die Grundlinie und MQ $= r\Delta\theta$ die Höhe ist, und es ist dann näherungsweise das Wachsthum der Fläche:

$$\Delta z = \tfrac{1}{2} r\Delta\theta\,(r + \Delta r)$$

$$\Delta z = \tfrac{1}{2} r^2 \Delta\theta + \tfrac{1}{2} r\Delta r\Delta\theta$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta\theta} = \tfrac{1}{2} r^2 + \tfrac{1}{2} r\Delta r$$

Lässt man nun, um aus diesem Differenzenquotienten den Differentialquotienten (die Derivirte von z) zu erhalten, $\Delta\theta$ bis zu 0 convergiren, so verschwindet gleichzeitig $\Delta r = M\Delta\theta + N\Delta\theta^2 + \cdots$ und wir haben dann:

$$\frac{dz}{d\theta} = \tfrac{1}{2} r^2$$

$$dz = \tfrac{1}{2} r^2 d\theta = \tfrac{1}{2} [f(\theta)]^2 d\theta$$

$$z = \tfrac{1}{2} \int [f(\theta)]^2 d\theta = \tfrac{1}{2} \int r^2 d\theta$$

* Anmerkung. Nach der Infinitesimalmethode betrachtet man bei der Berechnung einer Quantität das Integral immer als Summe. Denkt man sich das Stück des Abscissenkreises von $\theta = \theta_0$ bis $\theta = \theta_1$, in n gleiche Theile getheilt und setzt $\frac{\theta_1 - \theta_0}{n} = \Delta\theta$, so

*) Es kann mit wachsendem θ der radius vector auch abnehmen und Δr negativ sein.

findet man durch dieselben Betrachtungen, wie im §31, dass für ein sehr kleines $\Delta\theta$, näherungsweise:

$$z=\tfrac{1}{2}f(\theta_0)\cdot f(\theta_0)\Delta\theta+\tfrac{1}{2}f(\theta_0+\Delta\theta)\cdot f(\theta_0+\Delta\theta)\Delta\theta+\cdots+e\Delta\theta^2$$

und $\Delta\theta$ unendlich klein (als Element $d\theta$) gedacht, ganz genau:

$$z=\tfrac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1}[f(\theta)]^2 d\theta$$

45a.

Aufgabe. Die Archimedische Spirale zu quadriren, deren Gleichung:

$$r=\frac{a}{2\pi}\cdot\theta$$

Auflösung. Man hat hier:

$$z=\tfrac{1}{2}\int\left(\frac{a}{2\pi}\right)^2\cdot\theta^2 d\theta$$

$$z=\frac{a^2}{24\pi^2}\cdot\theta^3$$

Soll das Integral von $\theta=0$ anheben, so ist keine Constante nöthig.

Für eine halbe Umdrehung ($\theta=\pi$) ist $z=\frac{a^2}{24}\cdot\pi$ (S. Figur, höhere Geometrie § 96).

Für eine ganze Umdrehung ($\theta=2\pi$) ist $z=\frac{a^2}{3}\pi$.

Man kann auch so rechnen (§ 33, Anmerkg.): Aus $r=\frac{a}{2\pi}\theta$ folgt: $d\theta=\frac{2\pi}{a}dr$, mithin ist auch:

$$z=\frac{\pi}{a}\int r^2 dr$$

$$z=\frac{\pi}{3a}r^3$$

wo keine Constante nöthig ist, wenn die Fläche von $r=0$ anheben soll.

Für eine halbe Umdrehung ($r=\frac{1}{2}a$) ist $z=\frac{a^2}{24}\pi$. Für $r=a$ ist $z=\frac{a^2}{3}\pi$.

Anmerkung 1. Bei der zweiten vollen Revolution beschreibt der radius vector, der im Anfang $= a$ ist und am Ende derselben $= 2a$ wird, die Fläche der ersten völligen Revolution offenbar aufs Neue wieder, und so in der Folge. Um also die einfache Fläche zu erhalten, welche nach m Revolutionen beschrieben worden (zwischen den m Windungen enthalten ist) hat man:

$$z = \frac{a^2}{8\pi^2}\int_{(m-1)2\pi}^{m.2\pi} \theta^2\,d\theta = \frac{\pi}{a}\int_{(m-1)a}^{ma} r^2\,dr$$

$$z = (m^2 - m + \tfrac{1}{3})a^2\pi$$

Für $m = 1, 2, 3 \cdots$ ist $s = \frac{1}{3}a^2\pi,\ 2\frac{1}{3}a^2\pi,\ 8\frac{1}{3}a^2\pi$ etc.

Anmerkung 2. Will man die Fläche (Spire) haben, welche zwischen der $m$ten und $m+1$ten Windung enthalten ist, so braucht man offenbar nur die Fläche von m Revolutionen von der von $m+1$ zu subtrahiren. Man hat dann nach vorhergehender Formel:

$$z = 2ma^2\pi.$$

Die zwischen der 1sten und 2ten Windung ($m = 1$) enthaltene Fläche ist hiernach $= 2a^2\pi$, und die zwischen der $m$ten und $m+1$ten Windung enthaltene Fläche ist, wie schon Archimed gefunden, just m Mal so gross, als die Fläche, welche zwischen der 1sten und 2ten Windung enthalten ist.

45b.

Aufgabe 1. Die Fläche der vierschlingigen Linie zu finden, deren Gleichung: (S. Fig. höh. Geom. § 77)

$$r = a \cdot \sin 2\theta$$

Aufgabe 2. Die Fläche der Cardioide zu finden, deren Gleichung: (S. Fig. höh. Geom. § 65):

$$r = 2a\,(1 + \cos\theta) = 4a \cdot \cos^2 \tfrac{1}{2}\theta$$

Aufgabe 3. Die Schlinge des Cartesianischen Blattes zu quadriren, dessen Gleichung: (S. Fig. höh. Geom. § 79)

$$r = \frac{3a \cdot \sin\theta\ \cos\theta}{\sin^3\theta + \cos^3\theta} = \frac{3a \cdot \mathrm{tg}\,\theta}{(1 + \mathrm{tg}^3\theta)\cdot\cos\theta}$$

Auflösung 1. Es ist für alle vier Schleifen: (§ 19)

$$s = \tfrac{1}{2}a^2\pi$$

Auflösung 2. Es ist: (§ 19)

$$z = 6a^2\pi$$

Auflösung 3. Man findet, $\operatorname{tg}\varphi = n$ gesetzt: (§ 7, 2)

$$z = \frac{3}{2}a^2$$

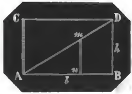
46.

* Wir haben in § 32 nach der Infinitesimalmethode die Fläche einer Orthogonal-Curve als aus Elementar-Rechtecken zusammengefügt, fingirt, bei denen nur die eine Dimension, die Grundlinie dx, unendlich klein, folglich jedes Element ein unendlich Kleines erster Ordnung ist und sie durch Integralrechnung summirt. Nach derselben Methode kann man die ganze Fläche aber auch als aus Elementar-Rechtecken zusammengesetzt fingiren, bei welchen sowohl Grundlinie als Höhe unendlich klein und mithin jede Elementarfläche ein unendlich Kleines zweiter Ordnung ist. Ebenso kann man einen Körper aus geraden Prismen zusammengesetzt fingiren, deren Länge, Breite und Höhe unendlich klein, folglich jeder Elementarkörper ein unendlich Kleines dritter Ordnung ist. Da nun diese Betrachtungsweise auf sogenannte Doppel- und Dreifach-Integrale führt und dieselben in der Anwendung der Integralrechnung, namentlich auf Mechanik und Physik, nicht zu vermeiden sind, so wollen wir hier versuchen, den Anfänger durch leichte geometrische Beispiele auf diese subtile Sache vorzubereiten.

47.

* Man kann das Differential eines Rechtecks AD darstellen, durch:

$$dz = dx \cdot dy$$



und sich das ganze Rechteck als aus solchen Elementar-Rechtecken bestehend denken, und wo Grundlinie und Höhe dx, dy beide unendlich klein, deshalb aber keineswegs gleich gross zu sein brauchen.

Um nun anzudeuten, dass diese Elementarflächen erstlich in der Ausdehnung von A nach C, d. i. von $y = 0$ bis $y = h$ und dann die erhaltene unendlich schmale Schichte AC in der Ausdehnung von A nach B, d. i. von $x = 0$ bis $x = b$ genommen

werden soll, bedürfen wir zweier Summen- oder Integralzeichen. Man schreibt nämlich so:

$$z = \int_{x=0}^{x=b} \int_{y=0}^{y=h} dx dy$$

und um dieses zweifache oder Doppel-Integral zu finden, integriren wir erst in Bezug auf y, dann ist:

$$z = \int_0^b dx \cdot \int dy = \int_0^b dx \cdot y + c$$

Wird dies erste Integral wie gefordert, von $y = 0$ bis $y = h$ genommen, wonach die Constante c überflüssig ist, so hat man:

$$z = \int_0^b dx \cdot h = \int_0^b h \cdot dx$$

Unter dem zweiten Integralzeichen steht jetzt das unendlich schmale Rechteck AC. Integriren wir jetzt in Bezug auf x und zwar von $x = 0$ bis $x = b$, so ist richtig:

$$z = bh$$

Anmerkung. Weil in vorstehendem Beispiel x und y nicht von einander abhängen, so hätte man auch in umgekehrter Ordnung, erst in Bezug x und dann in Bezug auf y integriren können. Wäre aber y von x, folglich auch dy von dx abhängig, so muss man nothwendig erst in Bezug auf die abhängige Grösse integriren. Wollte man z. B. nach obiger Formel $dz = dx \cdot dy$, die Fläche des Dreiecks ABD berechnen, so ist die Gleichung der geraden AD:

$$y = \frac{h}{b} x$$

dann ist: $z = \int_0^x \int_0^y dx dy = \int_0^x dx \int_0^y dy = \int_0^x y dx$

Da nun hier y von x abhängt, eine Function von x ist, so muss man diese statt y substituiren. Diese erste Integration giebt uns ein von $mn = y$, also auch mittelbar von $An = x$, abhängendes unendlich kleines Rechteck mn, nämlich:

$$z = \int_0^x \frac{h}{b} x \cdot dx = \frac{h}{b} \int_0^x x dx$$

Integrirt man jetzt in Bezug auf x, so ist:

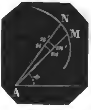
$$z = \frac{1}{2}\frac{h}{b}x^2 + C$$

Nimmt man dies Integral von $x = 0$ bis $x = b$, so ist:

$$z = \frac{1}{2}bh.$$

48.

* In Betreff der Polarcurven kann man das Differential der Fläche, statt durch ein unendlich Kleines erster Ordnung, nämlich durch ein Dreieck, dessen Höhe unendlich klein ist, auch folgendermaassen durch ein unendliches Kleines zweiter Ordnung ausdrücken.



Es sei A der Pol, AM, AN zwei Leitstrahlen, die den, mit der Einheit beschriebenen unendlich kleinen Bogen $d\theta$ zwischen sich fassen. Ferner sei $Am = \varrho$, also $\widehat{mn} = \varrho \cdot d\theta$; ferner $mm' = d\varrho$, dann ist die unendlich kleine als Rechteck zu betrachtende Elementarfläche $mm'n'n$ das Differential und $= \varrho d\varphi \cdot d\varrho$. Mithin:

$$z = \int\int \varrho d\theta d\varrho.$$

Man integrirt nun erst in Bezug auf ϱ von $\varrho = 0$ bis $\varrho = r$. Ist dann r eine Function von θ, so muss diese statt r gesetzt und dann in Bezug auf θ integrirt werden.

Die erste Integration giebt uns die Summe aller in der Richtung des Leitstrahls vom Pol bis an die krumme Linie auf einander folgenden Elemente, welche zusammen ein Dreieck bilden, dessen Grundlinie $= r$ und dessen Höhe $= rd\theta$, nämlich wie in § 44:

$$z = \int \tfrac{1}{2}r \cdot rd\theta.$$

Wollte man nach dieser Formel z. B. den Inhalt eines Kreises berechnen, dessen Radius $= a$, so hat man, weil hier a von θ unabhängig ist:

$$z = \tfrac{1}{2}a^2 \int_0^{2\pi} d\theta = a^2\pi.$$

Drittes Buch.

Rectification krummer Linien.

49.

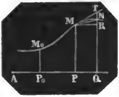
Bei der Berechnung irgend eines Quantums (Fläche, Linie, Volumen etc.) kommt es, wie schon bemerkt, zunächst immer nur darauf an, das Differential der zu berechnenden Grösse zu finden, um dann durch Integration die Grösse selbst zu haben. Die Integration kann man in solchem Falle immer als eine Summation betrachten, das Differential aber findet man entweder nach der Grenzmethode (indem man erst die Derivirte sucht) oder direct und bequemer nach der Infinitesimalmethode.

Wir haben beiderlei Wege im Vorhergehenden so umständlich bezeichnet, dass wir es in methodischer Hinsicht jetzt für besser halten, den Anfänger zum Gebrauch seiner eigenen Kraft aufzufordern. Denn etwas ganz anderes ist es, die Infinitesimalrechnung selbstständig anzuwenden, was eigenes Nachdenken erfordert, als sie bloss zu verstehen. Wir wollen zu dem Ende das, was gefunden werden soll, in Aufgaben kleiden, damit der Anfänger erst selbst über die Lösung nachsinnen kann.

50.

Aufgabe 1. Es sei allgemein:

$$y = f(x)$$



die Gleichung einer krummen Linie. Man sucht eine Formel, nach welcher man die Länge eines Bogens $\widehat{M_0M} = s$, dessen Endpuncts-Abscissen $AP_0 = x_0$ und $AP = x$ gegeben sind, berechnen kann.

Auflösung. Um zuerst das Differential des Bogens s zu finden, lassen wir die Abscisse $AP = x$ um $PQ = \Delta x$ wachsen, alsdann wächst die Ordinate $MP = y$ um $NR = \Delta y$ und der Bogen $M_0M = s$ um $\widehat{MN} = \Delta s$.

Es ist nun $\widehat{MN} > \overline{MN}$ und $\widehat{MN} < \overline{MT} + \overline{NT}$, oder, weil die Sehne $\overline{MN} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \Delta x \sqrt{1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}}$ und (weil $RT = \Delta x \cdot \operatorname{tg} \tau = \Delta x \cdot \frac{dy}{dx}$ ist) so ist:

$$MT = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta x^2 \cdot \frac{dy^2}{dx^2}}; \qquad NT = \Delta x \cdot \frac{dy}{dx} - \Delta y$$

$$\Delta s > \Delta x \cdot \sqrt{1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}}$$

$$\Delta s < \Delta x \cdot \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} + \Delta x \cdot \frac{dy}{dx} - \Delta y$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} > \sqrt{1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}}$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} < \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} + \frac{dy}{dx} - \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Lassen wir jetzt Δx bis zu Null convergiren, so werden beide Ausdrücke (zwischen welchen die Derivirte liegt) gleich, und es ist:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$$

$$ds = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} \cdot dx = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

* Nach der Infinitesimalmethode hat man aus dem characteristischen Dreieck ohne Weitläufigkeit für das Differential des Bogens s unmittelbar: (D.-R. § 56)

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} \cdot dx$$

$$s = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} \cdot dx = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \cdot dx$$

51.

Um auch hier einzusehen, dass man das bestimmte Integral als Summe unendlich vieler unendlich kleiner Sehnen (Bögen) betrachten kann, bedenke man, dass vermöge der Gleichung $y=f(x)$:

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + f''(x)\cdot\frac{\Delta x^2}{1\cdot 2}+\cdots$$

oder (weil die Function $y=f(x)$ und ihre Derivirten, wie immer, continuirlich vorausgesetzt werden), wenn man Δx sehr klein nimmt, näherungsweise $\Delta y = f'(x)\Delta x$, mithin, wenn man $x-x_0$ in n gleiche Theile getheilt denkt und $\frac{x-x_0}{n}=\Delta x$ setzt und in $\Delta y = f'(x)\Delta x$ statt x nach und nach x_0, $x_0+\Delta x, \cdots\cdots x_0+(n-1)\Delta x$ setzt, indem dann für diese Substitutionen annähernd die verschiedenen Δy kommen, näherungsweise:

$$s=\sqrt{\Delta x^2+[f'(x_0)]^2\Delta x^2}+\sqrt{\Delta x^2+[f'(x_0+\Delta x)]^2\cdot\Delta x^2}+\cdots\cdots+e\cdot\Delta x^2$$

Je kleiner man Δx nimmt, je genauer wird die Summe die Länge des Bogens s geben. Nimmt man Δx unendlich klein, so verschwindet $e\Delta x^2$ und man hat ganz genau (§§ 31, 32):

$$s=\sqrt{1+[f'(x_0)]^2}\cdot dx+\sqrt{1+[f'(x_0+dx)]^2}\cdot dx+\sqrt{1+[f'(x_0+2dx)]^2}\cdot dx$$
$$+\cdots\cdots+\sqrt{1+[f'(x)]^2}\cdot dx$$

$$s=\int_{x_0}^{x}\sqrt{1+[f'(x)]^2}\cdot dx=\int_{x_0}^{x}\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot dx$$

52.

Aufgabe 2. Die Parabel zu rectificiren, deren Gleichung:

$$y^2=px$$

Auflösung. Man hat hier $2ydy=pdx$, woraus:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{p}{2y} \text{ und } \frac{dy^2}{dx^2}=\frac{p}{4x}$$

$$s=\int\sqrt{1+\frac{p}{4x}}\cdot dx$$

Setzt man nach Cauchy $\sqrt{1+\frac{p}{4x}}=t$, so ist: $x=\frac{\frac{1}{4}p}{t^2-1}$ und

$$s=\int t\cdot dx = tx-\int x\cdot dt$$

$$s= tx-\tfrac{1}{4}p\int\frac{dt}{t^2-1}\quad\text{also (§ 14, 3)}$$

$$s= tx-\tfrac{1}{8}p\cdot l\left(\frac{t-1}{t+1}\right)$$

$$s= x\cdot\sqrt{1+\frac{p}{4x}}+\tfrac{1}{8}p\, l\left(\frac{\sqrt{1+\frac{p}{4x}}+1}{\sqrt{1+\frac{p}{4x}}-1}\right)$$

Soll das Integral im Scheitel anheben, so ist keine Constante nöthig, indem es für $x=0$ von selbst verschwindet. Dies folgt aus D.-R. (§ 62), oder auch aus:

$$s=\sqrt{x^2+\tfrac{1}{4}px}+\tfrac{1}{8}p\cdot l\,\frac{\sqrt{4x+p}+\sqrt{4x}}{\sqrt{4x+p}-\sqrt{4x}}$$

$$s=\sqrt{x^2+\tfrac{1}{4}px}+\tfrac{1}{4}p\;\; l\left(\frac{\sqrt{4x+p}+\sqrt{4x}}{p}\right)$$

Anmerkung. Man kann auch, wenn es leichtere Rechnung giebt, alles durch y ausdrücken. Aus:

$$y^2=px \text{ folgt:}$$

$$2y\,dy=p\,dx,\text{ also:}$$

$$\frac{dy^2}{dx^2}=\frac{p^2}{4y^2}\quad\text{und}\quad dx=\frac{2y}{p}\cdot dy$$

$$s=\frac{1}{p}\int\sqrt{p^2+4y^2}\cdot dy$$

Setze $\sqrt{p^2+4y^2}=2ty$, so ist $y^2=\dfrac{\frac{1}{4}p^2}{t^2-1}$ und

$$s=\frac{y}{2p}\sqrt{p^2+4y^2}+\tfrac{1}{4}p\cdot l\left(\frac{2y+\sqrt{p^2+4y^2}}{p}\right)$$

wobei keine Constante nöthig ist, wenn das Integral im Scheitel $(y=0)$ anheben soll.

53.

Aufgabe 3. Die Cycloide zu rectificiren.

Auflösung. **Aus den in der Diff.-Rechn. § 187 aufgestellten Gleichungen dieser Linie:**

$$x = r\theta - r\sin\theta \qquad \text{folgt:} \qquad dx = r\,(1-\cos\theta)\,d\theta$$
$$y = r - r\cos\theta \qquad\qquad\qquad dy = r\sin\theta d\theta$$

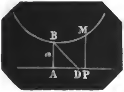
$$dx^2 + dy^2 = 2r^2\,(1-\cos\theta)\cdot d\theta^2$$
$$ds^2 = 4r^2\sin^2\tfrac{1}{2}\theta\cdot d\theta^2$$
$$ds = 2r\cdot\sin\tfrac{1}{2}\theta\cdot d\theta$$
$$s = 2r\int\sin\tfrac{1}{2}\theta\cdot d\theta$$
$$s = -4r\cos\tfrac{1}{2}\theta + c$$

Soll das Integral für $\theta = 0$ verschwinden (anheben), so muss $c = 4r$ sein, daher:

$$s = 4r\,(1-\cos\tfrac{1}{2}\theta)$$
$$s = 8r\sin^2\tfrac{1}{4}\theta$$

Setzt man $\theta = 2\pi$, so ist die Länge der ganzen Cycloide $= 8r$. Die Cycloide ist eine von den wenigen krummen Linien, die sich genau rectificiren lassen.

54.



Aufgabe 4. Die Kettenlinie zu rectificiren. Ihre Gleichung ist:

$$y = a\cdot\frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}$$

Auflösung. Man hat hier:

$$ds = \sqrt{\left\{1 + \frac{\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)^2}{4}\right\}}\cdot dx$$

$$s = \int_0^x \frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}\cdot dx$$

$$s = a\cdot\frac{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}}{2} = \sqrt{y^2 - a^2}$$

Die Länge eines Bogens BM dieser Linie lässt sich also genau

durch eine gerade Linie darstellen (rectificiren). Steckt man nämlich die End-Ordinate $MP = y$, als Hypotenuse, von B nach D ab, so ist $AD = \sqrt{y^2 - a^2} = \widehat{BM}$. Denn

$$y^2 = \frac{a^2}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}} + 2 + e^{-\frac{2x}{a}}\right)$$

$$y^2 - a^2 = \frac{a^2}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}} + 2 + e^{-\frac{2x}{a}}\right) - \frac{4a^2}{4} = \frac{a^2}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)^2$$

$$\sqrt{y^2 - a^2} = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

55.

Aufgabe 5. Die logarithmische Linie zu rectificiren. Ihre Gleichung ist:

$$y = a \cdot lx$$

Auflösung. Hier ist:

$$s = \int \sqrt{\left(1 + \frac{a^2}{x^2}\right)} \cdot dx$$

Man setze $\sqrt{1 + \frac{a^2}{x^2}} = z$, so ist $x = \frac{a}{\sqrt{z^2 - 1}}$

$$s = zx - a\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} \text{ und (§ 16, 1)}$$

$$s = \sqrt{a^2 + x^2} - a\,l\left(\frac{a + \sqrt{a^2 + x^2}}{x}\right) + c$$

Soll das Integral von $x = 0$ anheben, so ist die hinzuzufügende Constante $c = \infty$.

56.

Aufgabe 6. Es ist eine krumme Linie durch Polar-Coordinaten gegeben, nämlich allgemein:

$$r = f(\theta)$$

Man sucht eine allgemeine Formel, nach welcher man die Länge eines bestimmten Bogens berechnen kann. (Fig. § 44.)

Auflösung. Das Differential des Bogens $M_0M = s$ ist hier offenbar: $ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}$, daher:

$$s=\int\sqrt{r^2d\theta^2+dr^2}=\int\sqrt{r^2+\frac{dr^2}{d\theta^2}}\cdot d\theta$$

57.

Aufgabe 7. Die Archimedische Spirale zu rectificiren, deren Gleichung:

$$r=\frac{a}{2\pi}\cdot\theta$$

Auflösung. Hier ist $\frac{dr}{d\theta}=\frac{a}{2\pi}$, mithin:

$$s=\frac{a}{2\pi}\int\sqrt{1+\theta^2}\cdot d\theta$$

Setze $\sqrt{1+\theta^2}=t\theta$, so ist $\theta^2=\frac{1}{t^2-1}$ und

$$\frac{2\pi}{a}\cdot s=t\cdot\frac{\theta^2}{2}-\tfrac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2-1}$$

$$\frac{2\pi}{a}\cdot s=\tfrac{1}{2}\theta\sqrt{1+\theta^2}+\tfrac{1}{4}l\left(\frac{\sqrt{1+\theta^2}+\theta}{\sqrt{1+\theta^2}-\theta}\right)$$

$$s=\frac{a}{4\pi}\left[\theta\sqrt{1+\theta^2}+l\left(\theta+\sqrt{1+\theta^2}\right)\right]$$

58.

Aufgabe 8. Die Exponentialspirale zu rectificiren:

$$r=e^{\theta}$$

Auflösung. Man hat hier $\frac{dr}{d\theta}=e^{\theta}$, daher

$$s=\sqrt{2}\cdot\int e^{\theta}d\theta$$

$$s=e^{\theta}\sqrt{2}+c=r\sqrt{2}+c'$$

Nehmen wir dies Integral von $\theta=-\infty$ bis $\theta=0$, oder von $r=0$ bis $r=1$, so findet man für die Länge aller unzähligen sich immer näher um den Pol lagernden Windungen, eine endliche Grösse $=\sqrt{2}$.

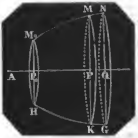
Viertes Buch.

Cubatur der Revolutionskörper.

59.

Aufgabe 1. Es sei allgemein:

$$y = f(x)$$



die Gleichung einer krummen Linie. Es wird eine allgemeine Formel gesucht, nach welcher man das Volumen des Körpers berechnen kann, welcher durch eine ganze Umdrehung der bei P_0, P rechtwinkligen Figur M_0P_0PM um P_0P als Achse beschrieben wird. Es sei $AP_0 = x_0$, $AP = x$.

Auflösung. Um zuerst das Differential des Volumens V zu finden, lassen wir $AP = x$ um $PQ = \Delta x$ wachsen, alsdann wächst das Volumen um das cylinderförmige Stück $MG = \Delta V$ und es ist näherungsweise, indem wir durch $y + \varepsilon$ eine mittlere Ordinate zwischen $MP = y$ und $NQ = y + \Delta y$ bezeichnen:

$$\Delta V = (y + \varepsilon)^2 \pi \cdot \Delta x$$

$$\frac{\Delta V}{\Delta x} = (y + \varepsilon)^2 \pi.$$

Lassen wir nun, um auf die Derivirte zu kommen, Δx bis zu Null abnehmen, so verschwindet gleichzeitig auch ε und wir haben:

$$\frac{dV}{dx} = y^2\pi = [f(x)]^2 \cdot \pi$$

$$dV = \pi y^2 dx = \pi[f(x)]^2 dx$$

$$V = \pi\int_{x_0}^{x} y^2 dx = \pi\int_{x_0}^{x} [f(x)]^2 dx.$$

* Nach der Infinitesimalmethode hat man, das Integral als Summe betrachtet, auch hier unmittelbar (§ 32):

$$\int_{x_0}^{x} [f(x)]^2 \pi dx = \pi\left\{[f(x_0)]^2 dx + [f(x_0+dx)]^2 dx + \cdots + [f(x)]^2 dx\right\}$$

60.

Aufgabe 2. Das Paraboloid zu berechnen, welches entsteht, indem sich ein Parabelbogen AM um die Achse $AP = x$ dreht. Die Gleichung sei:

$$y^2 = px$$

Auflösung. Nach dem Vorhergehenden ist:

$$V = \pi\int_0^{x} px \cdot dx = \frac{\pi}{2} px^2 = \frac{x}{2} \cdot y^2 \pi.$$

Das Paraboloid ist also just halb so gross, als ein Cylinder, dessen Höhe $AP = x$ und dessen Radius $MP = y$ ist.

61.

Aufgabe 3. Eine Ellipse dreht sich um ihre grosse Achse, man soll das dadurch beschriebene längliche Ellipsoid berechnen:

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

Auflösung. Man hat hier:

$$V = \frac{b^2}{a^2}\pi\int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2)dx = \tfrac{4}{3}ab^2\pi$$

Will man das abgeplattete Ellipsoid haben, welches durch Rotation um die kleine Achse entsteht, so ist:

$$V = \frac{a^2}{b^2}\pi\int_{-b}^{+b} (b^2 - y^2)dy = \tfrac{4}{3}a^2b\pi$$

62.

Aufgabe 4. Den Körper zu berechnen, der durch Umdrehung der Cycloide um ihre Acshe entsteht. Ihre Gleichungen sind (D. R. 137):

$$x = r\theta - r\sin\theta$$
$$y = r(1 - \cos\theta).$$

Auflösung. Hier ist:

$$V = r^3\pi \int (1 - \cos\theta)^3 d\theta = r^3\pi \int \sin^6 \tfrac{1}{2}\theta \cdot d\theta$$

$$V = r^3\pi \int (-\tfrac{1}{4}\cos 3\theta + \tfrac{6}{4}\cos 2\theta - \tfrac{15}{4}\cos\theta + \tfrac{10}{4})\, d\theta$$

$$V = r^3\pi(-\tfrac{1}{12}\sin 3\theta + \tfrac{3}{4}\sin 2\theta - \tfrac{15}{4}\sin\theta + \tfrac{5}{2}\theta).$$

Soll das Integral von $\theta = 0$ anheben, so ist keine Constante erforderlich, soll es dann bis $\theta = 2\pi$ genommen werden, so hat man für den ganzen Körper (Anmkg. § 40):

$$V = 5r^3\pi^2.$$

63.

Aufgabe 5. Den Körper zu berechnen, der durch Umdrehung der logarithmischen Linie entsteht:

$$y = a \cdot lx.$$

Auflösung. Man hat hier:

$$V = a^2\pi \int_0^x (lx)^2 dx \text{ und (§ 10):}$$

$$V = a^2\pi x \{(lx)^2 - 2lx + 2\}$$

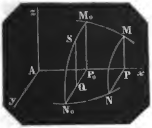
Nimmt man $x = 1$, so ist das Volumen des beschriebenen Körpers, obgleich von unendlicher Ausdehnung, doch nur $= 2a^2\pi$.

64.

* Um schliesslich noch eine allgemeine Formel anzugeben, nach welcher man auch solche Körper berechnen kann, welche nicht durch Rotation entstanden sind, für deren Oberfläche aber eine Gleichung:

$$z = F(x, y)$$

gegeben ist, und wo x, y absolut, z aber die abhängig veränderliche Grösse ist, überlege man Folgendes:



Es sei $AP_0 = x_0$ und durch P_0 parallel mit der Ebene der yz eine Ebene gelegt, so lässt sich der Flächen-Inhalt des Durchschnitts $M_0N_0P_0$ finden. Setzt man nämlich in der Gleichung für die Oberfläche des Körpers:

$$z = F(x_0, y) \cdots\cdots (1)$$

in welcher nun x_0 constant bleibt, für y alle möglichen Werthe, welche die Gleichung (1) zu nehmen gestattet, so ist diese Gleichung nichts anderes als die Gleichung der krummen Linie M_0N_0, in welcher die mit yAz parallele Ebene die Oberfläche des fraglichen Körpers schneidet. P_0N_0 ist hier gleichsam die Abscissenachse.

Setzt man in (1) $y = 0$, so erhält man die Ordinate $z = F(x_0, 0) = M_0P_0$; setzt man $y = P_0Q$, so wird die Ordinate $z = F(x_0, P_0Q) = SQ$ u.s.w. Der Inhalt dieser Durchschnittsfläche ist also $= \int_0^y F(x_0, y)\,dy$ und wo das Integral innerhalb der Grenzen 0 und y oder auch von $y_0 = P_0Q$ bis $y = P_0Q_1$ genommen werden kann.

Für diese äusserste Grenze von y können nun aber zwei Fälle Statt finden. Sie kann nämlich erstens durch die Natur der Gleichung (1) bestimmt, d. h. eine Function von dem jedesmaligen x sein, oder man kann zweitens, eine beliebige Function $y = \varphi(x)$ annehmen.

Ist nun $AP = x$ und denkt man sich das Intervall $x - x_0$ in n gleiche Theile getheilt, setzt $\frac{x - x_0}{n} = \Delta x$, so sind die von x_0 bis x auf einander folgenden Durchschnittsflächen offenbar:

$$\int_{y_0}^{y} F(x_0, y)dy;\ \int_{y_0}^{y} F(x_0 + \Delta x, y)dy; \cdots \int_{y_0}^{y} F(x_0 + (n-1)\Delta x, y)\,dy,$$

wo aber, wie gesagt, die Grenzen dieser Integrale keineswegs dieselben sind.

Die Summe aller zwischen diesen Durchschnittsflächen liegenden Stücken des Körpers von x_0 bis x, welche man als Prismata von der Höhe Δx betrachten kann, ist näherungsweise:

$$\left\{\int F(x_0,y)dy + \int F(x_0+\Delta x,y)dy + \cdots + \int F(x_0+(n-1)\Delta x,y)dy\right\}\Delta x$$

Denkt man Δx unendlich klein $= dx$, so ist das Volumen des Körpers von x_0 bis x ganz genau:

$$V = \int_{x_0}^{x}\left(\int_{y_0}^{y} F(x,y)dy\right)\cdot dx$$

oder wie man zu schreiben pflegt:

$$V = \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} F(x,y)dx\,dy = \int_{x_0}^{x} dx\cdot\int_{y_0}^{y} F(x,y)\,dy.$$

65.

* Man integrirt also erst in Bezug auf y innerhalb der bestimmten Grenzen, indem man x als constant betrachtet. Multiplicirt man das gefundene Integral mit dx und integrirt auf's Neue in Bezug auf x, innerhalb der bestimmten Grenzen, so hat man das bestimmte Doppelintegral.*)

Anmerkung. Kann man für jedes $x = x_0$, $x_0 + \Delta x$, $x_0 + 2\Delta x$ etc. das y immer innerhalb derselben Grenzen y_0, y_1 nehmen, so bildet das berechnete Volumen ein prismenartigen Körper, oben von einer krummen, seitwärts aber von vier ebenen Flächen begrenzt und dessen, in der Ebene der xy liegenden Grundfläche ein Rechteck (die Projection von der obern krummen Fläche) ist, dessen Länge $= x - x_0$ und dessen Höhe $= y_1 - y_0$.

Kann man aber zu jedem x, das y nicht innerhalb derselben Grenzen nehmen, was z. B. nicht möglich ist, wenn auch die den Körper begrenzende Seitenfläche krumm wäre, weil dann auch die in der Ebene der x, y liegende Grundfläche kein Rechteck, sondern ganz oder theilweise von einer krummen Linie begrenzt ist; alsdann sind zwar die Grössen x, y noch immer unabhängig veränderlich, jedoch die Grenzwerthe der einen von denen der andern abhängig. Dieser die Integration oft sehr erschwerende Umstand muss bei der Bestimmung des Doppelintegrals wohl beachtet werden, wie schon folgendes Beispiel zeigt.

---

*) Wenn $F(x, y)$ für beide Grenzen stetig ist und kein Zeichenwechsel Statt findet, so kann man offenbar auch die Integrationsordnung umkehren, d. h. erst in Bezug auf y und dann in Bezug auf x integriren.

66.

* Beispiel. Es sei die Gleichung für die Oberfläche des Körpers

$$z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

so hat man hier:

$$V = \int\int z\,dx\,dy = \int dx \cdot \int \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \cdot dy.$$

Sieht man nun erst x als constant an und setzt Kürze halber $r^2 - x^2 = \varrho^2$, so ist (§ 34):

$$V = \int dx \left\{ \tfrac{1}{2} y \sqrt{\varrho^2 - y^2} + \tfrac{1}{2} \varrho^2 \text{ Arc sin } \frac{y}{\varrho} \right\}$$

Man sieht aus der gegebenen Gleichung (1), dass für y kein grösserer Werth gesetzt werden darf als $\varrho = \sqrt{r^2 - x^2}$, weil sonst z imaginair würde. Ist also $AP = x$, so kann man das erstere Integral nur nehmen von $y = 0$ bis $y = \varrho = \sqrt{r^2 - x^2} = PN$ und hat dann die Fläche des mit der Ebene der yz parallelen Schnittes MNP.

Für $y = 0$ verschwindet das Integral und für $y = \varrho$ hat man die Fläche des Durchschnitts $= \frac{1}{2}\varrho^2 . \frac{\pi}{2}$, mithin ist für ϱ seinen Werth zurückgesetzt:

$$V = \int dx \cdot \tfrac{1}{2}(r^2 - x^2)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} \int (r^2 - x^2) dx$$

$$V = \tfrac{1}{4}\pi\left(r^2 x - \frac{x^3}{3}\right).$$

Lässt man dieses Integral von $x = 0$ anheben und nimmt es bis $x = r$, und weiter kann es sich wegen Gleichung (1) nicht erstrecken, so ist:

$$V = \tfrac{1}{6} r^3 \pi.$$

Wir haben von dem ganzen Körper, dessen Oberfläche durch die Gleichung (1) gegeben, nur den Theil gefunden, welcher in dem einen der acht dreiflächigen Coordinatenwinkel liegt. Aus dem doppelten Vorzeichen der Ausdrücke für z und ϱ ersieht man aber leicht, dass die Theile des Körpers in den übrigen sieben Winkeln dieselbe Grösse haben. Es ist daher mit Rücksicht auf die negativen Coordinaten:

$$V = \frac{4}{3}r^3\pi.$$

Man hätte auch, um gleich die obere Hälfte des Körpers zu finden, erst von $y = -\varrho$ bis $y = +\varrho$ und dann von $x = -r$ bis $y = +r$ integriren können. In Zeichen:

$$V = \int_{-r}^{+r} dx \cdot \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{+\sqrt{r^2-x^2}} \sqrt{(r^2 - x^2) - y^2} \cdot dy$$

67.

* **Aufgabe.** Es ist die Gleichung eines Paraboloids gegeben (höhere Geometrie § 136):

$$z = \frac{x^2 + y^2}{p}$$

und in der Ebene der xy aus dem Anfangspunt A mit einem Radius ϱ ein Kreis beschrieben. In der Peripherie denke man sich eine auf der Ebene der xy senkrechte Cylinderfläche errichtet und bis an die Fläche des Paraboloids gehend.

Man sucht das Volumen, welches von beiden Flächen und von der Basis (Kreis) eingeschlossen wird.

Auflösung. Man hat hier:

$$V = \frac{1}{p}\int_0^{\varrho} dx \cdot \int_{y=0}^{\sqrt{\varrho^2-x^2}} (x^2 + y^2) dy$$

$$V = \frac{1}{p}\int_0^{\varrho} dx \cdot \left(x^2 + \frac{y^2}{3}\right) y.$$

Für $y = 0$ wird das erste Integral Null und für $y = \sqrt{\varrho^2 - x^2}$ ist:

$$V = \frac{1}{3p}\int_0^{\varrho} (\varrho^2 + 2x^2) \cdot \sqrt{\varrho^2 - x^2} \cdot dx$$

$$3pV = \int_0^{\varrho} \left\{ \varrho^2 \sqrt{\varrho^2 - x^2} \cdot dx + 2x^2 \sqrt{\varrho^2 - x^2}\, dx \right\}$$

Setzt man $x = \varrho \sin \varphi$, mithin: $dx = \varrho \cos \varphi \cdot d\varphi$ und die entsprechenden neuen Grenzen $\varphi = 0$ und $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, so ist, mit Rücksicht auf die Bemerkung § 40:

$$\varrho^2\int_0^\varrho \sqrt{\varrho^2-x^2}\cdot dx = \varrho^4\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^2\varphi\, d\varphi = \varrho^4\cdot\frac{\pi}{4}.$$

$$2\int_0^\varrho x^2\sqrt{\varrho^2-x^2}\cdot dx = 2\varrho^4\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\sin^2\varphi-\sin^4\varphi)\, d\varphi = \tfrac{1}{4}\varrho^4\cdot\frac{\pi}{2}$$

Es ist mithin $V=\frac{1}{8p}\varrho^4\pi$, oder für alle vier Quadranten:

$$V=\frac{1}{2p}\cdot\varrho^4\pi.$$

Anmerkung. Die auf der Ebene der xy, nach dem darin um A als Leitlinie beschriebenen Kreise gekrümmten senkrechten Cylinderfläche des fraglichen Körpers, schneidet hier die andere Seitenfläche, welche zugleich auch Seitenfläche des Paraboloids ist, in einem gleichen und parallelen Kreise (was bei einer andern Leitlinie (Ellipse, Parabel etc.) oder andern Oberfläche nicht der Fall wäre). Da nun, wegen der vorgeschriebenen Leitlinie, immer $x^2+y^2=\varrho^2$ sein muss, so ist die Höhe unserer Cylinderfläche $z=\frac{x^2+y^2}{p}=\frac{\varrho^2}{p}$, mithin das Volumen dieses Cylinders $=\frac{\varrho^2}{p}\cdot\varrho^2\pi$. Zieht man hiervon den oben gefundenen, das Paraboloid umgebenden Körper ab, so findet man hier auf anderem Wege wieder das Volumen des Paraboloids $=\frac{1}{2p}\varrho^4\pi$ nämlich halb so gross als der Cylinder.

68.

* **Aufgabe.** Das Volumen des Ellipsoids mit drei Achsen zu finden. Die Gleichung ist (höhere Geometrie § 138):

$$z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$$

Auflösung. Man hat hier:

$$V=8c\int_0^a dx\int_0^{b\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}}\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)}dy$$

$$V=8c\int_0^a dx\cdot\int_0^{b\varrho}\sqrt{\varrho^2-\frac{y^2}{b^2}}\cdot dy$$

Setze $\frac{y}{b} = \varrho \sin \varphi$, mithin $dy = b\varrho \cos \varphi \cdot d\varphi$, so ist (§ 34, 2):

$$\int_0^{b\varrho} \sqrt{\varrho^2 - \frac{y^2}{b^2}} \cdot dy = b\varrho^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi = b\varrho^2 \left(\frac{\sin 2\varphi}{4} + \tfrac{1}{2}\varphi\right) = b\varrho^2 \cdot \tfrac{1}{4}\pi$$

$$V = 2bc\pi \int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx$$

$$V = \tfrac{4}{3}abc\pi.$$

69.

* Die Infinitesimalmethode betrachtet die Körper als Summe unendlich kleiner Prismen (Elemente), deren Grundfläche Rechtecke $= dx \cdot dy$, deren Höhe $= dz$, deren Inhalt also $= dx \cdot dy \cdot dz$. Das Volumen des Körpers ist dann ausgedrückt durch das dreifache Integral:

$$V = \int\int\int dx\, dy\, dz$$

welches nun andeutet, dass die unendlich kleinen Parallelepipeden nach den drei Richtungen der Coordinaten-Achsen summirt werden müssen. Integrirt man erst in Bezug auf z, so ist:

$$V = \int\int z\, dx\, dy$$

und hier bedeutet nun $z\,dx\,dy$ eine aus Parallepipeden bestehende Säule, deren Grundfläche das unendlich kleine Rechteck $dx \cdot dy$ und dessen Höhe z ist. Ist die Grenze von z eine Function von x, y [$z = F(x,y)$], so muss diese jetzt statt z substituirt werden, alsdann ist:

$$V = \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} F(x,y)\, dx\, dy$$

Integrirt man jetzt in Bezug auf y von $y = y_0$ bis $y = y_1$, so erhält man als Summe solcher Säulen eine Schichte, deren Breite $= y_1 - y_0$, deren Dicke $= dx$ und die mit der Ebene der yz parallel läuft. Integrirt man drittens in Bezug auf x, so erhält man alle Schichten von $x = x_0$ bis $x = x_1$.

70.

* Das Differential für das Volumen eines Körpers wird manchmal auch in Polar-Coordinaten ausgedrückt, indem es hier so-

wohl, als bei der Summirung der Flächenelemente gleichgültig ist, welche Form diese Elemente haben. Die hier verlangte allgemeine Formel findet man am leichtesten direct. Es sei nämlich $AM = r$ der vom Pol A bis zu einem Punct M des Körpers gehende radius vector, φ der Winkel, den er mit der Ebene der xy macht und ψ der Winkel, den seine Projection AQ mit der Achse Ax bildet, denkt man sich von M ein Perpendikel MR auf die Achse AZ gefällt, so ist $MR = AQ = r \cos \varphi$. Denkt man mit RM aus R den unendlich kleinen Bogen Mm parallel mit der Ebene der xy beschrieben, so ist $Mm = r \cos \varphi d\psi$. Beschreibt man ferner mit $AM = r$ aus A und in der auf xy senkrechten Ebene MAQ, den unendlich kleinen Bogen Mn, so ist $Mn = r \cdot d\varphi$. Denkt man sich aus diesen Elementen die rechteckförmige Fläche $MNnm$ construirt (deren Inhalt $= r^2 \cos \varphi d\varphi d\psi$) und diese wiederum als Grundfläche eines Prismas von der unendlich kleinen Höhe $= dr$, so hat man das Differential des Körpers $dV = r^2 \cos \varphi \cdot d\varphi \cdot d\psi \cdot dr$ (welches also ein Stück von einer Kugelschale ist), und für das gesuchte Volumen:

$$V = \int\int\int r^2 \cos \varphi \, d\varphi \, d\psi \, dr$$

Man integrirt nun erst in Bezug auf r, ist dann r eine Function von φ und ψ, so muss man diese Function statt r setzen und dann in Bezug auf ψ und φ integriren, was in der Regel immer auf grosse Weitläufigkeiten führt. Wollte man z. B. nach obiger Formel das Volumen einer Kugel berechnen, deren radius $= a$ ist, so hat man

$$V = \int\int \cos \varphi \, d\varphi \, d\psi \int_0^a r^2 \, dr$$

$$V = \frac{a^3}{3} \int \cos \varphi \, d\varphi \cdot \int d\psi$$

Das erste Integral giebt uns die Summe aller, in der Richtung des Radius, vom Mittelpunct bis zur Oberfläche, auf einander folgenden Differentiale (Elemente), welche zusammen einen pyramidenartigen Körper bilden, deren Höhe $= a$ und deren Grundfläche $= a \cos \varphi \, d\varphi \cdot a d\psi$. Es ist nämlich:

$$V = \int\int \frac{a}{3} \cdot a^2 \cos \varphi \, d\varphi \, d\psi$$

Integriren wir jetzt in Bezug auf ψ, und zwar von $\psi = 0$ bis $\psi = \frac{1}{2}\pi$, so erhalten wir einen Körper, dessen Basis eine Zone von der Breite $a \cos\varphi d\varphi$ ist, nämlich:

$$V = \int \frac{a}{3} \cdot a\frac{\pi}{2} \cdot a \cos\varphi \, d\varphi$$

Integriren wir jetzt von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, so haben wir den achten Theil der Kugel, nämlich:

$$V = \frac{a^3}{6}\pi.$$

Fünftes Buch.

Complanation der Revolutionskörper.

71.

Aufgabe. Es sei allgemein:

$$y = f(x)$$

die Gleichung einer krummen Linie, welche sich um die Achse Ax ganz herum dreht. (S. Figur § 56). Es wird eine allgemeine Formel gesucht, nach welcher man die Fläche s berechnen kann, welche ein Bogen M_0M beschreibt, dessen Endpuncts-Abscissen $AP_0 = x_0$, $AP = x$ gegeben sind.

Auflösung. Um das Differential der Fläche zu finden, lassen wir die Abscisse $AP = x$ um $PQ = \Delta x$ fliessen, dann ist die Sehne $MN = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}} \cdot \Delta x$ und die Fläche des abgekürzten Kegels, welche diese Sehne beschreibt:

$$(y + y \pm \Delta y)\pi \cdot \sqrt{1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}} \cdot \Delta x \text{ *)}$$

mithin, weil

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + f''(x) \cdot \frac{\Delta x^2}{1 \cdot 2} + \cdots = \left[f'(x) + f''(x) \cdot \frac{\Delta x}{1 \cdot 2} + \cdots\right]\Delta x = \varepsilon \Delta x$$

für das Wachsthum der Fläche s näherungsweise:

*) Wir setzen $\pm \Delta y$, je nachdem $NQ \gtrless MP$.

$$\Delta z = 2y\pi \cdot \sqrt{1+\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}} \cdot \Delta x \pm \varepsilon \Delta x^2 \cdot \sqrt{1+\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}}$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = 2y\pi \cdot \sqrt{1+\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}} \pm \varepsilon \Delta x \cdot \sqrt{1+\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}}$$

Lässt man nun, um auf die Derivirte und dadurch auf das Differential zu kommen, Δx bis zu Null convergiren, so fallen Sehne und Bogen zusammen und man hat:

$$\frac{dz}{dx} = 2y\pi\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}$$

$$dz = 2y\pi \cdot \sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}} \cdot dx$$

$$z = 2\pi \int_{x_0}^{x} f(x) \cdot \sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}} \cdot dx$$

* Anmerkung 1. Statt, wie hier geschehen, erst nach der Grenzmethode die Derivirte zu suchen, kann man kürzer und deutlicher durch Summation zu obigem Resultat gelangen. Denkt man sich nämlich das Interval $x - x_0$ in n gleiche Theile getheilt, setzt $\frac{x-x_0}{n} = \Delta x$ und denkt die den x_0, $x_0 + \Delta x$, $x_0 + 2\Delta x \cdots$ entsprechenden Ordinaten $f(x_0)$, $f(x_0 + \Delta x) \cdots$ gezogen, so würde die Summe der Kegelflächen:

$$= 2\pi \{ f(x_0) \cdot \sqrt{1+[f'(x_0)]^2} + f(x_0+\Delta x) \cdot \sqrt{1+[f'(x_0+\Delta x)]^2} + \cdots \} \Delta x$$

sein, und diese Summe die gesuchte Oberfläche desto näher geben, je kleiner Δx oder je grösser n. Lässt man Δx zum Differential dx convergiren, so ist die Grenze dieser Summe ganz genau gleich dem oben angegebenen Integral. (Vergl. § 31.)

* Anmerkung 2. Nach der Infinitesimalmethode gelangt man viel schneller zum Differential. In dem characteristischen Dreieck ist die mit dem Bogen zusammenfallende Sehne $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}} \cdot dx$, mithin die beschriebene Kegelfläche $= (2y \pm dy)\pi \cdot ds = 2y\pi ds \pm dy \cdot ds\pi$, oder weil eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung $dy \cdot ds$ gegen die erster Ordnung verschwindet, ganz einfach:

$$dz = 2y\pi \;\; ds = 2\pi\, f(x)\cdot\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}\cdot dx$$

$$z = 2\pi\int y ds = 2\pi\int f(x)\cdot\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}\cdot dx$$

72.

Aufgabe. Ein Parabelbogen AM dreht sich um die Achse Ax; man soll die krumme Oberfläche des beschriebenen Paraboloids finden.

Auflösung. Aus der Gleichung der Parabel $y=\sqrt{px}$ folgt: $\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}=\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{p^2+4px}}{\sqrt{px}}$, mithin:

$$z = \pi\sqrt{p}\int(4x+p)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$z = \frac{\pi\sqrt{p}}{6}\cdot(4x+p)^{\frac{3}{2}}+c$$

Soll das Integral im Scheitel anheben, also für $x=0$ auch $z=0$ sein, so hat man:

$$0=\frac{\pi}{6}p^2+c, \text{ mithin:}$$

$$z=\frac{\pi}{6}\left\{(4x+p)^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{p}-p^2\right\}$$

73.

Aufgabe. Die Oberfläche zu finden, welche eine Ellipse beschreibt, indem sie sich um ihre grosse Achse dreht. Ihre Gleichung ist:

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

Auflösung. Man hat hier zuerst:

$$\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}=\frac{\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}}{a\sqrt{a^2-x^2}}, \text{ daher:}$$

$$z=\frac{2\pi b}{a^2}\int\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}\cdot dx$$

$$z=\frac{2\pi b}{a^2}\int\sqrt{a^4-e^2x^2}\cdot dx$$

$$z=\frac{2\pi b}{a^2}\cdot e\int\sqrt{\frac{a^4}{e^2}-x^2}\cdot dx$$

Setzt man $\frac{a^4}{e^2} = \alpha^2$, so ist (§ 34, 2):

$$z = \frac{2\pi b e}{a^2}\left(\tfrac{1}{2}x\sqrt{\alpha^2 - x^2} + \tfrac{1}{2}\alpha^2 \operatorname{Arc\,sin}\frac{x}{\alpha}\right) + c$$

$$z = \frac{\pi b\sqrt{a^2 - b^2}}{a^2}\left(x \cdot \sqrt{\frac{a^4}{a^2 - b^2} - x^2} + \frac{a^4}{a^2 - b^2}\operatorname{Arc\,sin}\frac{x\sqrt{a^2 - b^2}}{a^2}\right)$$

$$z = \frac{b\pi x}{a^2}\cdot\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2} + \frac{a^2 b\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}\cdot\operatorname{Arc\,sin}\frac{x\sqrt{a^2 - b^2}}{a^2}$$

Soll die Fläche für $x = 0$ anheben, so ist keine Constante nöthig. Für $x = a$ hat man die halbe Oberfläche des Ellipsoids. Die ganze ist mithin:

$$z = 2b^2\pi + \frac{2a^2 b\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}\cdot\operatorname{Arc\,sin}\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

Wird $b = a$, so findet man, (D.-R. § 62) dass:

$$\frac{\operatorname{Arc\,sin}\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{0}{0} = \frac{1}{a}$$

und folglich $z = 4a^2\pi$ ist.

Anmerkung. Rotirt die Ellipse statt um ihre grosse, um ihre kleine Achse, und solche kommen in der Praxis eigentlich nur vor, so ist:

$$x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$$

$$z = \frac{2a\pi}{b}\int\sqrt{b^4 + (a^2 - b^2)y^2}\cdot dy$$

$$z = \frac{2a\pi}{b}\cdot\sqrt{a^2 - b^2}\int\sqrt{\frac{b^4}{a^2 - b^2} + y^2}\cdot dy$$

Setze $\frac{b^4}{a^2 - b^2} = m^2$ und $\sqrt{m^2 + y^2} = ty$ etc., so ist: (§ 35)

$$z = \frac{a\pi y}{b^2}\sqrt{b^4 + (a^2 - b^2)y^2} + \frac{ab^2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}\cdot l\left(\frac{y\cdot\sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{b^4 + (a^2 - b^2)y^2}}{b^2}\right)$$

Soll das Integral für $y = 0$ anheben, so ist keine Constante nöthig. Nimmt man das Integral von $y = 0$ bis $y = b$ und ver-

doppelt es, so hat man für die Oberfläche des ganzen abgeplatteten Ellipsoids

$$s = 2a^2\pi + \frac{2ab^2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}} \cdot l\left(\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)$$

Um den Werth dieses Integrals für den Fall zu finden, wo $b = a$ wird, bemerke man, dass (D.-R. § 62) für $b = a$ der Bruch:

$$\frac{l\left(\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)}{\sqrt{a^2-b^2}} = \frac{0}{0} = \frac{a^2 + a\sqrt{a^2-b^2}}{ab^2+b^2\cdot\sqrt{a^2-b^2}} = \frac{1}{a}$$

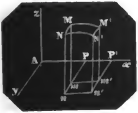
und folglich $s = 4a^2\pi$ ist.

74.

* Um schliesslich noch eine allgemeine Formel zu finden, nach welcher man auch die Oberflächen solcher Körper berechnen kann, die nicht durch Rotation entstanden, für deren Oberfläche aber eine Gleichung:

$$s = F(x, y)$$

gegeben ist, lasse man $AP = x$ um $PP' = \Delta x$ und $Pm = y$ um $mn = \Delta y$ wachsen und bilde das Rechteck $mm'n'n$, dessen Seiten Δx, Δy sind. Legt man durch die Seiten dieses Rechtecks Ebenen, wovon zwei mit der Ebene yAs und zwei mit der Ebene xAs parallel sind, so fassen diese vier, auf yAx senkrechten Ebenen, von der fraglichen Oberfläche ein krummlinigt begrenztes Stück MM'N'N zwischen sich, dessen Projection auf der Ebene der xy offenbar das Rechteck $mm'n'n$ ist.



Lässt man nun Δx, Δy bis zu Differentialen convergiren, so verwandelt sich das erwähnte Flächenstück MM'N'N in ein geradlinigt begrenztes, welches man als Tangential-Ebene des Punctes $M(x, y, s)$ und als das Differential ds der gesuchten Fläche betrachten kann.

Heisst nun U der Winkel, den diese Tangial-Ebene mit der Projections-Ebene yAx macht, so ist (höh. Geom. § 107):

$$ds \cdot \cos U = dx\,dy$$

und da nun (D.-R. § 163), $\cos U = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}$, so hat man:

$$dz = dx \cdot dy \cdot \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$$

$$z = \int\int dx dy \cdot \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$$

und wo nun das, fast immer auf grosse Weitläufigkeiten führende Doppel-Integral innerhalb der Grenzen genommen werden muss, welche die Horizontalprojection der gesuchten Fläche in sich fassen.

75.

* Aufgabe. Man suche nach vorstehender Formel die Oberfläche der Kugel, deren Gleichung:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

Auflösung. Man hat hier zuerst $\left(\frac{dz}{dx}\right) = -\frac{x}{z}$, $\left(\frac{dz}{dy}\right) = -\frac{y}{z}$

und also $\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2} = \frac{r}{z} = \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}$, mithin:

$$z = r \int^r dx \int_{y=0}^{y=\sqrt{r^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}$$

Setzt man $r^2 - x^2 = \varrho^2$, so hat man:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{\varrho^2 - y^2}} = \text{Arc sin}\, \frac{y}{\varrho}, \text{ also } \int_0^\varrho \frac{dy}{\sqrt{\varrho^2 - y^2}} = \tfrac{1}{2}\pi$$

$$z = \tfrac{1}{2}\pi r \cdot \int_0^r dx = \tfrac{1}{2} r^2 \pi$$

Für alle acht Quadranten ist also:

$$z = 4r^2\pi.$$

Sechstes Buch.

Näherungsweise Integrationen innerhalb bestimmter Grenzen.

76.

Streng genommen kann man nur die Differentiale von der Form $ax^m dx$ (wo m nicht $= -1$ ist), als integrabel betrachten, denn alle übrigen Formen, welche immer auf transcendente Functionen führen, wie $\frac{dx}{1+x}$, $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ etc. sind nur deshalb als integrirbar anzusehen, weil man ihre Integrale $l(1+x)$, $\operatorname{Arc}\sin x$ etc. für beliebige Werthe von x aus vollständig berechneten logar. trig. Tafeln entnehmen kann.

Sehr häufig kommen nun aber Fälle vor, wo man das Integral eines Differentials, selbst unter Zuziehung der erwähnten transcendenten Functionen, doch nicht in geschlossener Form erhalten kann, weil man entweder nicht die anzuwendende Methode kennt, welche zu dem fraglichen Integral führt, oder auch, weil in der Wirklichkeit gar keine Function existirt, welche differentiirt, das zu integrirende Differential wiedergiebt. In diesen Fällen muss man sich dann mit einer Annäherung begnügen und hierzu giebt es verschiedene Mittel, wie folgende §§ zeigen.

77.

Integration durch unendliche Reihen. Man suche das zu integrirende Differential $f(x)dx$, d. h. den Factor $f(x)$ in eine

solche unendliche Reihe zu verwandeln, welche für diejenigen Grenzen, für welche das Integral bestimmt werden soll, gut convergirt, und integrire jedes einzelne Glied. Als Beispiel nehmen wir die Rectification der Ellipse. Aus: $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$ folgt: $a^2-b^2=a^2\varepsilon^2$ gesetzt, wo $\varepsilon=\frac{e}{a}$ ist (höh. Geom. § 37), wenn das Integral von $x=0$ anheben soll (§ 50):

$$s=\int_0^x \frac{\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}\cdot dx$$

In geschlossener Form lässt sich dies Integral nicht darstellen. Wollte man deshalb beide Wurzelgrössen:

$$\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}=a\left(1-\frac{\varepsilon^2}{a^2}x^2\right)^{\frac{1}{2}} \text{und} \left(a^2-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}=a^{-1}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

in unendliche Reihen verwandeln, so würden beide Reihen (weil der zweite Theil des Binoms ein echter Bruch ist), sowie auch ihr Product convergent werden und die Integration eines jeden Gliedes möglich sein. Durch dio Einführung einer neuen veränderlichen Grösse gelangt man aber kürzer zum Ziel.

Setzt man nämlich $x=a\cos\theta$, mithin $dx=-a\sin\theta\, d\theta$, so hat man:

$$\int_0^x \frac{\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}\cdot dx=-a\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\theta} \sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\theta}\cdot d\theta \text{*)}$$

$$s=a\int_{\theta}^{\frac{1}{2}\pi} (1-\varepsilon^2\cos^2\theta)^{\frac{1}{2}}\cdot d\theta \text{**)}$$

Weil nun ε, also auch $\varepsilon\cos\theta$, ein echter Bruch ist, so kann man die Wurzelgrösse in eine convergente Reihe auflösen und hat dann (Anal. § 71):

---

*) Aus $x=a\cos\theta$, folgt $\theta=\text{Arc}\cos\frac{x}{a}$ und für $x=0$ ist $\theta=\frac{1}{2}\pi$, d. h. die den alten Grenzen 0 und x entsprechenden neuen Grenzen sind $\theta=\frac{1}{2}\pi$ und $\theta=\text{Arc}\cos\frac{x}{a}$.

**) Man darf immer die Grenzen umkehren, wenn man zugleich das Vorzeichen umkehrt. Denn wären für die untere und obere Grenze die Werthe des ersten Integrals m und n, mithin $s=-a\,(n-m)$, so wäre das zweite Integral $=a\,(m-n)$, also ganz dasselbe.

$$s = a\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left(1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2\cos^2\theta - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\varepsilon^4\cos^4\theta - \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\varepsilon^6\cos^6\theta - \cdots\right)d\theta$$

Die einzelnen Glieder lassen sich am leichtesten integriren, wenn man die Potenzen der cosinus durch Vielfache des Bogens ausdrückt. Es ist nämlich (Anal. § 97):

$$\cos^2\theta = \tfrac{1}{2}\,(\cos 2\theta + 1)$$
$$\cos^4\theta = \tfrac{1}{8}\,(\cos 4\theta + 4\cos 2\theta + 3)$$
$$\cos^6\theta = \tfrac{1}{32}\,(\cos 6\theta + 6\cos 4\theta + 15\cos 2\theta + 10)$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Werden diese Werthe substituirt, so hat man:

$$(1-\varepsilon^2\cos^2\theta)^{\frac{1}{2}} = \left\{\begin{array}{l} 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2\cdot\frac{1}{2}(\cos 2\theta + 1) \\ -\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\varepsilon^4\cdot\frac{1}{8}(\cos 4\theta + 4\cos 2\theta + 3) \\ -\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\varepsilon^6\cdot\frac{1}{32}(\cos 6\theta + 6\cos 4\theta + 15\cos 2\theta + 10) \\ \quad\vdots \end{array}\right\}$$

Es ist mithin:

$$s = a\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\theta\cdot\left\{\begin{array}{l} 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\varepsilon^2 - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\cdot\frac{3}{8}\varepsilon^4 - \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{10}{32}\varepsilon^6 - \cdots \\ -(\frac{1}{4}\varepsilon^2 + \frac{1}{16}\varepsilon^4 + \frac{15}{512} + \cdots)\cos 2\theta \\ -(\frac{1}{64}\varepsilon^4 + \frac{3}{256}\varepsilon^6 + \cdots)\cos 4\theta \\ -(\frac{1}{512}\varepsilon^6 + \cdots \quad \cdots)\cos 6\theta \\ \quad\vdots \end{array}\right\}$$

$$s = a\cdot\left\{\begin{array}{l} \left[1 - (\frac{1}{2})^2\varepsilon^2 - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\cdot\frac{\varepsilon^4}{3} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\cdot\frac{\varepsilon^6}{5} - \cdots\cdots\right]\cdot\theta \\ \qquad -(\frac{1}{8}\varepsilon^2 + \frac{1}{32}\varepsilon^4 + \frac{15}{1024}\varepsilon^6 + \cdots\cdots)\cdot\sin 2\theta \\ \qquad\quad -(\frac{1}{256}\varepsilon^4 + \frac{3}{1024}\varepsilon^6 + \cdots\cdots)\cdot\sin 4\theta \\ \qquad\qquad -(\frac{1}{3072}\varepsilon^6 + \cdots\cdots)\cdot\sin 6\theta \\ \qquad\qquad\quad\vdots \end{array}\right.$$

Soll das Integral von $x = 0$ $(\theta = \frac{1}{2}\pi)$ anheben, so müsste eine Constante $C = -\left[1 - (\frac{1}{2})^2\varepsilon^2 - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\cdot\frac{\varepsilon^4}{3} - \cdots\cdots\right]\frac{\pi}{2}$ hinzugefügt

werden. Lässt man aber das Integral von $\theta = 0 (x = a)$ anheben, so ist keine Constante nöthig. Setzt man dann für θ einen beliebigen Werth $\theta_,$ $(x = a \cos \theta_,)$, so hat man das Integral von $\theta = 0$ bis $\theta = \theta_,$ $(x = a$ bis $x = a \cos \theta_,)$ durch eine gut convergirende Reihe, wobei jedoch zu beachten, dass die Länge des erhaltenen Bogens nicht vom Scheitel der kleinen Achse, sondern von dem der grossen an gerechnet wird. Wir erhalten demnach die Länge des elliptischen Bogens, dessen Endpuncts-Abscissen $x = a$ und $x = a \cdot \cos \theta_,$.

Will man einen ganzen Quadranten haben, so muss man $\theta = \frac{1}{2}\pi$ setzen, und dann ist:

$$s = a\frac{\pi}{2}\left\{1 - (\tfrac{1}{2})^2 \varepsilon^2 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{\varepsilon^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \frac{\varepsilon^6}{5} - \cdots \right\}$$

78.

Die Integration durch eine unendliche Reihe, wenn überhaupt möglich, führt in der Regel auf grosse Weitläufigkeiten, indem fast immer erst Substitutionen oder Umformungen vorgenommen werden müssen, um eine convergente Reihe zu erhalten, dann auch die Reihe nicht rasch genug convergirt. Kann man aber in dem zu suchenden bestimmten Integral $\int_{x_0}^{x} f(x)dx$ den Werth von $f(x)$ für jeden Werth von $x = x_0$ bis $x = x$ in Zahlen berechnen, so giebt es noch andere Methoden, nach welchen man dann das Integral näherungsweise findet. Von diesen Methoden, die sogenannte numerische oder mechanische Integration (Quadratur), die besonders häufig in der höheren Mechanik bei Berechnung der Störungen der Planeten- und Cometen-Bahnen angewandt werden, wollen wir in nachstehenden §§ drei mittheilen.

79.

1. Methode. Theilt man das Intervall $x - x_0$, innerhalb welchem das Integral $\int f(x)dx$ genommen werden soll, in n gleiche Theile und setzt Kürze halber $\frac{x - x_0}{n} = h$, so ist zufolge § 31, für ein kleines h näherungsweise:

$$\int_{x_0}^{x} f(x)dx = h\left[f(x_0 + f(x_0 + h) + f(x_0 + 2h) + \cdots + f(x_0 + (n-1)h)\right]$$

$$\int_{x_0}^{x} (f(x)dx = h)\left[f(x_0 + h) + f(x_0 + 2h) + f(x_0 + 3h) + \cdots \cdots f(x)\right]$$

Beide Reihen, von welchen die eine zu viel die andere zu wenig giebt, *) kommen dem gesuchten wahren Integral desto näher, je grösser n oder je kleiner h ist. Der Unterschied beider ist $[f(x)-f(x_0)]\cdot h$.

Nehmen wir von der Summe beider Reihen das Mittel, so ist näherungsweise:

$$\int_{x_0}^{x} f(x)dx = h\left[\tfrac{1}{2}f(x_0)+f(x_0+h)+f(x_0+2h)+\cdots+\tfrac{1}{2}f(x)\right]$$

Um die Genauigkeit dieser Formel an einem bekannten Fall zu prüfen, wollen wir darnach das Integral $\int_1^2 \frac{dx}{1+x^2}$ berechnen, welches uns in geschlossener Form bekannt ist und aus den gewöhnlichen Tafeln bis auf sieben Decimalen genau entnommen werden kann. Es ist nämlich $\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{Arc tg } x$, mithin:

$$\int_1^2 \frac{dx}{1+x^2} = \text{Arc}(\text{tg}=2) - \text{Arc}(\text{tg}=1) = \text{Arc}(\text{tg}=\tfrac{1}{3}). \text{ (Trig. § 100, 43.)}$$

Schlägt man den Winkel φ auf, dessen $\text{tg} = \frac{1}{3}$ ist, so findet man $\varphi = 18^0\ 26'\ 5'',8$. Die Länge des hiezu gehörigen, mit dem Radius = 1 beschriebenen Bogens ist $= \pi\cdot\frac{\varphi}{180} = 0{,}32175053$. Es ist mithin:

$$\int_1^2 \frac{dx}{1+x^2} = \text{Arc}(\text{tg}=\tfrac{1}{3}) = 0{,}32175053\cdots$$

Unsere Formel (worin $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, $x_0=1$; $x=2$) giebt uns indem wir das Intervall in $n=4$ Theile theilen, also $h=\frac{2-1}{4}=\frac{1}{4}$ setzen:

$$\int_1^2 \frac{dx}{1+x^2} = \tfrac{1}{4}\left[\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+1}+\frac{1}{1+(1\frac{1}{4})^2}+\frac{1}{1+(1\frac{1}{2})^2}+\frac{1}{1+(1\frac{3}{4})^2}+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+2^2}\right] = 0{,}31967$$

also, wie die Vergleichung zeigt, nur bis auf eine Decimale genau. Weil aber $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ in dem angegebenen Intervall stets abnehmend ist, so giebt die Formel für ein grösseres n auch ein genaueres Resultat.

*) Wäre $f(x)$ innerhalb des Intervalls $x-x_0$ bald wachsend, bald abnehmend, so könnte die eine Reihe das Integral zufällig ganz genau geben.

80.

2. **Methode.** Nach dem Taylors'chen Lehrsatz (D. R. § 46) ist immer (wenn $f(x)$ und ihre Derivirten als continuirlich vorausgesetzt werden, und dort statt der veränderlichen Grösse x die Constante x_0, und $x-x_0$ statt Δx gesetzt wird), weil $f(x)=f(x_0+\overline{x-x_0})$.

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)\cdot f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{1\cdot 2}f''(x_0)+\cdots\cdots(1)$$

wo das Intervall $x-x_0$ so klein sein muss, dass die Reihe, wenn nicht endlich, convergent wird.

Multiplicirt man beiderseits mit dx und integrirt von x_0 bis x, so hat man: *)

$$\int_{x_0}^{x} f(x)dx=(x-x_0)f(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{1\cdot 2}\cdot f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot f''(x_0)+\cdots\cdots(2)$$

Setzen wir Kürze halber das Intervall $x-x_0=h$, so ist: **)

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx=h\left[f(x_0)+\frac{h}{1\cdot 2}f'(x_0)+\frac{h^2}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot f''(x_0)+\cdots\cdots\right]\cdots(3)$$

---

*) Es ist:

$$\int f(x_0)dx=f(x_0)\cdot x+c, \text{ mithin:}$$

$$\int_{x_0}^{x} f(x_0)dx=f(x_0)\cdot x-f(x_0)\cdot x_0=(x-x_0)\cdot f(x_0).$$

Ebenso ist:

$$\int f(x_0)\cdot(x-x_0)dx=f(x_0)\cdot\frac{(x-x_0)^2}{2}+c \text{ mithin:}$$

$$\int_{x_0}^{x} f(x_0)(x-x_0)dx=f'(x_0)\cdot\frac{(x-x_0)^2}{1\cdot 2}$$

**) Wäre z. B. $f(x)=x^3$, also $f'(x)=3x^2$, $f''(x)=6x$, $f'''(x)=6$, so ist:

$$\int x^3dx=\frac{x^4}{4}+c, \text{ mithin für } x_0=3 \text{ und } h=2$$

$$\int_3^{3+2} x^3dx=\frac{5^4}{4}-\frac{3^4}{4}=136, \text{ aber auch:}$$

$$\int_3^{3+2} x^3dx=2\left[3^3+\frac{2}{1\cdot 2}\cdot 3\cdot 3^2+\frac{2^2}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 6\cdot 3+\frac{2^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot 6\right]=136.$$

Um in speciellen Fällen, wo nämlich $f(x)$ gegeben ist, die Differentialquotienten $f'(x)$, $f''(x)$ etc. nicht entwickeln zu brauchen, nehmen wir an, der Werth der eingeklammerten Reihe lasse sich kürzer und mit hinreichender Genauigkeit, durch die Summe der drei Functionen $f(x_0)$, $f(x_0+\frac{1}{2}h)$, $f(x_0+h)$, welche jede aber noch mit einem erst zu bestimmenden Coefficienten c, c', c'' multiplicirt ist, darstellen.*) Es sei nämlich:

$$c\cdot f(x_0)+c'\cdot f(x_0+\tfrac{1}{2}h)+c''\cdot f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{h}{1\cdot 2}f'(x_0)+\frac{h^2}{2\cdot 3}\cdot f''(x_0)+\ldots$$

oder, indem wir linker Hand $f(x_0+\frac{1}{2}h)$ und $f(x_0+h)$ nach dem Taylor'schen Lehrsatz entwickeln:

$$\left.\begin{array}{l} cf(x_0) \\ c'f(x_0)+c'\frac{h}{2}f'(x_0)+c'\left(\frac{h}{2}\right)^2\frac{f''(x_0)}{1\cdot 2}+\ldots \\ c''f(x_0)+c''.h.f'(x_0)+c''.h^2.\frac{f''(x_0)}{1\cdot 2}+\ldots \end{array}\right\}=f(x_0)+\frac{h}{1\cdot 2}f'(x_0)+\frac{h^2}{2\cdot 3}f''(x_0)+\ldots$$

Damit nun die bedeutendsten Glieder der linken Seite mit so vielen Gliedern der rechten als möglich übereinstimmen, hat man zur Bestimmung der fraglichen constanten Factoren c, c', c'' die Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{r} c+c'+c''=1 \\ \frac{c'}{2}+c''=\frac{1}{2} \\ \frac{c'}{8}+\frac{c''}{2}=\frac{1}{6} \end{array}\right\}\ \text{hieraus:}\ \begin{array}{l} c''=\frac{1}{6} \\ c'=\frac{4}{6} \\ c=\frac{1}{6} \end{array}$$

Unsere Annäherungsformel wäre also:

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)dx=\frac{h}{6}\Big[f(x_0)+4f(x_0+\tfrac{1}{2}h)+f(x_0+h)\Big]$$

Beispiel. Für $\int_1^2\frac{dx}{1+x^2}$ hat man: $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, $x_0=1, h=1$,

*) Nimmt man mehr als drei Functionen (am besten eine ungerade Anzahl), so wird die Näherungsformel genauer, aber auch weitläufiger.

mithin:

$$\int_1^2 \frac{dx}{1+x^2} = \tfrac{1}{6}\left[\frac{1}{1+1} + \frac{4}{1+(1\frac{1}{2})^2} + \frac{1}{1+2^2}\right] = 0{,}32179\ldots$$

also bis auf vier Decimalen genau.

18.

3. Methode. Noch genauere Näherungsformeln hat Gauss angegeben. Eine davon, welche wir mittheilen wollen, lässt sich folgendermaassen ableiten: Setzen wir in:

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx$$

die untere Grenze $x_0 = b - \frac{1}{2}h$, so wird die obere $= b + \frac{1}{2}h$, daher:

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx = \int_{b-\frac{1}{2}h}^{b+\frac{1}{2}h} f(x)\,dx$$

Setzen wir noch rechter Hand $x = b + u$, mithin $dx = du$, so ist:

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx = \int_{b-\frac{1}{2}h}^{b+\frac{1}{2}h} f(x)dx = \int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} f(b+u)du$$

Es ist wohl klar, dass in dem letzten Integral in Bezug auf u die entsprechenden Grenzen $-\frac{1}{2}h$ und $+\frac{1}{2}h$ sein müssen. Denn setzt man $-\frac{1}{2}h$ statt u, so kommt dasselbe, als wenn man im mittlern Integrale $b - \frac{1}{2}h$ statt x setzt.

Letzteres Integral lässt sich durch diesen Kunstgriff in eine Reihe entwickeln. Es ist nämlich:

$$f(b+u) = f(b) + f'(b)\cdot u + f''(b)\cdot\frac{u^2}{1\cdot 2} + f'''(b)\cdot\frac{u^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots$$

Beiderseits mit du multiplicirt und integrirt, kommt:

$$\int f(b+u)du = C + u\cdot f(b) + \frac{u^2}{1\cdot 2}\cdot f'(b) + \frac{u^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot f''(b) + \cdots$$

Nehmen wir nun dies Integral von $u = -\frac{1}{2}h$ bis $u = +\frac{1}{2}h$, so wird die Constante C eliminirt und wir haben, da (was gerade beabsichtigt wurde) alle gerade Potenzen von h herausfallen und nur halb so viel Glieder bleiben:

$$\int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} f(b+u)du = h\left[f(b)+\left(\frac{h}{2}\right)^2 \frac{f''(b)}{1\cdot2\cdot3}+\left(\frac{h}{2}\right)^4 \frac{f^{IV}(b)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}+\cdots\right.$$

Nehmen wir nun an, die eingeklammerte Reihe lasse sich mit hinreichender Annäherung durch zwei Functionen $f(b+mh)$ und $f(b+m'h)$, welche jede aber noch mit einem Factor k, k' multiplicirt ist, ausdrücken, so dass nämlich:

$$k\cdot f(b+mh)+k'\cdot f(b+m'h)=f(b)+\frac{h^2}{4}\cdot\frac{f''(b)}{1\cdot2\cdot3}+\frac{h^4}{16}\cdot\frac{f^{IV}(b)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}+\cdots$$

Werden die beiden Glieder linker Hand nach dem Taylor'schen Lehrsatz entwickelt, so muss zur Erreichung unserer Absicht die Entwickelung nothwendig so beschaffen sein, dass alle Glieder mit ungeraden Potenzen von h von selbst ausfallen. Dies fordert aber offenbar, dass erstens, die beiden Coefficienten k, k' einander gleich sind, und zweitens, dass $m'=-m$ ist. Um ferner, der einfachern Rechnung halber, die Quadrate der Coefficienten m und $-m$ zu vermeiden, da beide in der Entwickelung mit h zugleich in geraden Potenzen vorkommen, setzen wir $m=\sqrt{q}$, dann ist:

$$k\cdot f(b+h\sqrt{q})=k\left[f(b)+h\sqrt{q}\cdot f'(b)+h^2q\cdot\frac{f''(b)}{1\cdot2}+h^3q^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{f'''(b)}{1\cdot2\cdot3}+\cdots\right]$$

$$kf(b-h\sqrt{q})=k\left[f(b)-h\sqrt{q}\cdot f'(b)+h^2q\cdot\frac{f''(b)}{1\cdot2}-h^3q^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{f'''(b)}{1\cdot2\cdot3}+\cdots\right]$$

Es ist also:

$$2k\cdot f(b)+2kh^2q\cdot\frac{f''(b)}{1\cdot2}=f(b)+\frac{h^2}{4}\frac{f''(b)}{1\cdot2\cdot3}$$

Aus $2k=1$ und $kq=\frac{1}{24}$ folgt: $k=\frac{1}{2}$ und $q=\frac{1}{12}$.

Die Näherungsformel wäre also:

$$\int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} f(b+u)du=\int_{b-\frac{1}{2}h}^{b+\frac{1}{2}h} f(x)dx=h\left[\tfrac{1}{2}f\left(b+\frac{h}{\sqrt{12}}\right)+\tfrac{1}{2}f\left(b-\frac{h}{\sqrt{12}}\right)\right]$$

oder $b-\frac{1}{2}h=x_0$ also $b=x_0+\frac{1}{2}h$ gesetzt, so geschrieben:

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx=\frac{h}{2}\left\{f\left[x_0+\left(\tfrac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right)h\right]+f\left[x_0+\left(\tfrac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{12}}\right)h\right]\right\}$$

82.

Entwickeln wir die Näherungsformel mit drei Gliedern, so kann man annehmen es sei:

$$k \cdot f(b + h\sqrt{q}) + k \cdot f(b - h\sqrt{q}) + k' f(b) = f(b) + \frac{h^2}{4} \cdot \frac{f''(b)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$

Mithin mit Benutzung vorhergehender Entwickelung:

$$(2k+k') \cdot f(b) + 2k \cdot h^2 q \cdot \frac{f''(b)}{1 \cdot 2} + 2k \cdot h^4 q^2 \cdot \frac{(f''b)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$= f(b) + \frac{h^2}{4} \cdot \frac{f''(b)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{h^4}{16} \frac{f^{IV}(b)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots$$

$$2k + k' = 1;\ kq = \tfrac{1}{24};\ kq^2 = \tfrac{1}{160}$$

$$q = \tfrac{3}{20};\ k = \tfrac{5}{18};\ k' = \tfrac{4}{9}$$

$$\int_{b-\frac{1}{2}h}^{b+\frac{1}{2}h} f(x)\,dx = h\left[\tfrac{4}{9} f(b) + \tfrac{5}{18} f\left(b + h\sqrt{\tfrac{3}{20}}\right) + \tfrac{5}{18} \cdot f\left(b - h\sqrt{\tfrac{3}{20}}\right)\right]$$

Siebentes Buch.

Integration der Differential-Gleichungen.

I. Differentialgleichungen erster Ordnung ersten Grades.

83.

Erklärung. Jede Gleichung, in welcher veränderliche Grössen mit ihren Differentialen oder Differential-Quotienten, oder auch bloss Differentiale mit Constanten vermischt vorkommen, heisst eine Differentialgleichung. Die primitive Gleichung zwischen den veränderlichen Grössen dagegen, aus welcher die Differentialgleichung ihren Ursprung hat und durch arithmetische Operationen daraus abgeleitet werden kann, wird die entsprechende Integralgleichung genannt. Diese primitive oder sogen. Integralgleichung muss also so beschaffen sein, dass wenn daraus die Werthe der abhängig veränderlichen Grösse und ihre Differentiale gezogen und in die Differentialgleichung substituirt werden, derselben Genüge geleistet wird. So ist z. B., um das Gesagte durch ein Beispiel zu erläutern:

$$y \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = a \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

eine Differentialgleichung zwischen zwei veränderlichen Grössen und die hiezu gehörige Integralgleichung, wenn man x als absolut veränderlich betrachtet, ist:

$$y^2 + x^2 = a^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

Denn zieht man aus (2) die Werthe y und $\frac{dy}{dx}$, nämlich $y=\sqrt{a^2-x^2}$ und $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ und substituirt sie in (1), so wird derselben Genüge geleistet, denn, weil $1+\frac{dy^2}{dx^2}=\frac{a^2}{a^2-x^2}$ so ist:

$$\sqrt{a^2-x^2}\cdot\sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2}}=a$$

84.

Auf die Frage, wie man auf Differentialgleichungen kömmt, können wir vorläufig nur antworten, dass dies sehr häufig der Fall ist bei den Anwendungen der Mathematik auf Geometrie, Mechanik und Physik (physico-mathematiques), wo man den Zusammenhang veränderlicher Grössen (Ursache und Wirkung) aus bekannten Eigenschaften oder Bedingungen sucht, die man nicht anders, als durch Differentiale und Differentialgleichungen ausdrücken kann. Frägt man z. B., welches ist die krumme Linie, deren Normale für alle Puncte dieselbe, $=a$ ist, so würde man, um diese Eigenschaft der gesuchten Linie auszudrücken, nach D.-R. § 49, als Bedingungsgleichung die Differentialgleichung:

$$y\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}=a$$

aufstellen und hieraus die fragliche Beziehung (Integralgleichung) zwischen x und y finden müssen. Frägt man, welche krumme Linie ist so beschaffen, dass für jeden ihrer Puncte die Subtangente gleich der doppelten Abscisse ist, so würde man diese Bedingung (Eigenschaft) durch die Differentialgleichung $y\frac{dx}{dy}=2x$ ausdrücken müssen. (Diff.-Rechn. § 49.)

Bevor wir solche Art Aufgaben, deren wir im folgenden Buche mehrere aufstellen werden, lösen können, müssen wir erst die Methoden kennen lernen, um zu gegebenen Differentialgleichungen die ihnen entsprechenden Integralgleichungen zu finden.

85.

Der Ordnung halber hat man sämmtliche Differentialgleichungen in Abtheilungen gebracht. Eine Differentialgleichung gehört näm-

lich zur 1sten, 2ten, 3ten···· Ordnung, je nachdem darin das 1ste, 2te, 3te···· Differential (dy, d^2y, $d^3y\cdots$) der abhängig veränderlichen Grösse vorkommt: ferner zum 1sten, 2ten, 3ten··· Grade, je nachdem das Differential der abhängigen Grösse in der 1sten, 2ten, 3ten···· Potenz (dy, dy^2, dy^3 ···) darin enthalten ist.

Wir betrachten hier zunächst diejenigen Differentialgleichungen erster Ordnung und ersten Grades, welche nur zwei veränderliche Grössen x, y enthalten und sehen x als absolut veränderlich an. Bemerken müssen wir übrigens noch, dass die Integration der Differentialgleichungen fast immer mit grossen Schwierigkeiten verbunden ist und dass hier nur wenige allgemeine Methoden gefunden worden sind.

86.

1. Methode. Unmittelbare Integration, wenn die Differentialgleichung ein vollkommenes Differential ist, d. h. als durch unmittelbares Differentiiren einer primitiven Function $F(x, y) = 0$ entstanden, betrachtet werden kann.

Zufolge D.-R. § 117 erhält man das Differential einer Function $F(x, y) = 0$, indem man sie so differentiirt, als wenn sowohl y als x absolut veränderlich wäre, nämlich:

$$\left(\frac{dF}{dy}\right) dy + \left(\frac{dF}{dx}\right) dx = 0$$

Ferner folgt aus D.-R. § 144 (indem man dort $z = 0$ setzt), dass es einerlei ist, ob man $F(x, y) = 0$ erst in Bezug auf x und darauf wieder in Bezug auf y differentiirt, oder in umgekehrter Ordnung verfährt und erst in Bezug auf y und dann auf x differentiirt, in Zeichen:

$$\left(\frac{d^2F}{dx\,dy}\right) dx\,dy = \left(\frac{d^2F}{dy\,dx}\right) dy\,dx$$

Dies vorausgeschickt, bemerke man, dass eine jede Differentialgleichung erster Ordnung ersten Grades sich immer auf die Form:

$$M\,dy + N\,dx = 0$$

bringen lässt, wo M, N im Allgemeinen Functionen von x und y sind.

Wäre nun in dieser Differentialgleichung zufällig

$$\left(\frac{dM}{dx}\right) = \left(\frac{dN}{dy}\right)$$

wovon man sich durch wirkliche Differentiation leicht überzeugen kann, so könnte man die Differentialgleichung $Mdy + Ndx = 0$ als ein vollkommenes Differential, d. h. als durch unmittelbares Differentiiren einer Function von x, y entstanden denken und dann auch diese Function (die Integralgleichung) durch unmittelbares Integriren, d. h. ohne neue Kunstgriffe, nach den im Vorhergehenden gezeigten Methoden finden, indem man nur eins der beiden Glieder, z. B. Mdy, in Bezug auf y integrirt und dabei x einstweilen als constant ansieht, dem gefundenen Integral jedoch (weil es noch ein Glied in x allein enthalten kann) noch eine unbestimmte Function von x, die wir mit $\varphi(x)$ bezeichnen wollen, hinzufügt. Was $\varphi(x)$ sein muss ergiebt sich dann, indem man das erhaltene Integral rückwärts wieder differentiirt und den Differentialcoefficient von dx mit N vergleicht oder $=$ N setzt.

87.

Beispiel 1. Man suche die entsprechende Integralgleichung zu

$$3y^2dy - 8xy\,dx + 3x^2\,dx = 4x^2\,dy \cdots\cdots (1)$$

Auflösung. Die Differentialgleichung (1) lässt sich erstlich so schreiben:

$$(3y^2 - 4x^2)\,dy + (3x^2 - 8xy)\,dx = 0 \cdots\cdots (2)$$

Um zu erkennen, ob diese Differentialgleichung als durch unmittelbares Differentiiren entstanden betrachtet werden kann, hat man, da hier $M = 3y^2 - 4x^2$ und $N = 3x^2 - 8xy$ ist:

$$\left(\frac{dM}{dx}\right) = -8x;\ \left(\frac{dN}{dy}\right) = -8x$$

Da nun $\left(\frac{dM}{dx}\right) = \left(\frac{dN}{dy}\right)$, so ist die Gleichung (1) ein vollkommenes Differential, mithin die Integralgleichung

$$\int (3y^2 - 4x^2)\,dy = y^3 - 4x^2y + \varphi(x) + c$$

Die Differentiation des gefundenen Integrals giebt:

$$(3y^2 - 4x^2)\,dy + [-8xy + \varphi'(x)]\,dx = 0 \cdots\cdots (3)$$

Diese Gleichung mit der Gleichung (2) verglichen, giebt:

$$\varphi'(x)dx = 3x^2dx$$
$$\varphi(x) = x^3$$

Die zu (1) oder (2) gehörige Integralgleichung ist mithin:

$$y^3 - 4x^2y + x^3 = c$$

88.

Beispiel 2. Die zu integrirende Differentialgleichung sei:

$$(2ay + bx + h)\,dy + (2ex + by + k)\,dx = 0 \cdots\cdots (1)$$

Auflösung. Hier zeigt sich wieder, dass $\left(\frac{dM}{dx}\right) = \left(\frac{dN}{dy}\right) = b$, daher:

$$\int (2ay + bx + h)\,dy = ay^2 + bxy + hy + \varphi(x) = c$$

Dies Integral wieder differentiirt, kömmt:

$$(2ay + bx + h)\,dy + [by + \varphi'(x)]\,dx = 0$$

Dies Differential mit (1) verglichen, giebt:

$$\varphi'(x)\,dx = (2ex + k)\,dx$$
$$\varphi(x) = ex^2 + kx$$

Die gesuchte Integralgleichung ist also:

$$ay^2 + bxy + hy + ex^2 + kx = c$$

89.

Beispiel 3. Man integrire folgende Gleichung:

$$x\,dy - y\,dx = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

Auflösung. Hier ist $\left(\frac{dM}{dx}\right) = 1$ und $\left(\frac{dN}{dy}\right) = -1$, die Gleichung (1) also kein vollkommenes Differential, daher auch nicht unmittelbar zu integriren. Multiplicirt man sie aber mit $\frac{1}{xy}$, so erhält man:

$$\frac{1}{y} \cdot dy - \frac{1}{x}\,dx = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

In dieser Gleichung (2) ist nun $\left(\frac{dM}{dx}\right) = \left(\frac{dN}{dy}\right) = 0$, dieselbe also jetzt ein vollkommenes Differential und ihr Integral

$$ly - lx = lc$$

$$l\left(\frac{y}{x}\right) = lc$$

oder, indem man von den Logarithmen auf die Zahlen übergeht

$$y = cx$$

Anmerkung. Hier wurde ein unvollkommenes Differential (1) durch Beifügung eines sogenannten integrirenden Factors $\left(\frac{1}{xy}\right)$ zu einem vollkommenen Differential gemacht. Dies hat nun schon frühe die Frage hervorgerufen, ob wohl auch in allen andern Fällen, wo eine Differentialgleichung kein vollkommenes Differential ist, dieselbe vermittelst eines integrirenden Factors darauf gebracht werden könne, und ob sich dieser Factor nach einer bestimmten Regel finden lasse. Euler, der sich mit dieser Untersuchung sehr viel beschäftigt hat, ist zu keinem erwünschten Resultate gelangt. Dass eine Differentialgleichung ein vollkommenes Differential wäre oder durch einen integrirenden Factor dazu gemacht werden könne, muss als reiner Zufall betrachtet werden, weshalb wir uns auch nicht länger hiebei aufhalten wollen.

90.

2. Methode. Durch Separation. Kann man die veränderlichen Grössen einer Differentialgleichung von einander sondern, so kann auch allemal die Integration der Gleichung nach den früheren Regeln der Integralrechnung bewirkt werden.

So folgt z. B. aus:

$$xdy = ydx$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$ly = lx + lc = lcx$$

$$y = cx$$

Beispiel. Aus $3xdy + ydx = 0$ folgt:

$$3\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0$$
$$3\,ly + lx = lc$$
$$ly^3 x = lc$$
$$y^3 x = c$$

91.

3. **Methode. Durch Substitution.** Die Separation gelingt immer durch Substitution einer dritten veränderlichen Grösse, wenn die Differentialgleichung eine **homogene** ist, d. h. wenn die Summe der Exponenten der veränderlichen Grössen in jedem Gliede dieselbe ist. Man habe z. B. die Gleichung:

$$x^2dx + y^2dx + xy\,dy = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

Da hier die Summe der Exponenten in jedem Gliede = 2, oder jeder Coefficient der Differentiale von gleich hohem (2ten) Grade ist, so ist die Gleichung (1) homogen. Man setze nun:

$$y = tx,\ \text{mithin}:\ dy = xdt + tdx,\ \text{so ist}:$$
$$x^2dx + t^2x^2dx + x^3tdt + x^2t^2dx = 0$$
$$dx + t^2dx + xt\,dt + t^2dx = 0$$
$$(1 + 2t^2)\,dx + xtdt = 0$$
$$\frac{dx}{x} + \frac{tdt}{1 + 2t^2} = 0$$
$$lx + \tfrac{1}{4}l(1 + 2t^2) = lc$$

Jetzt für t seinen Werth $\frac{y}{x}$ zurückgesetzt:

$$lx + \tfrac{1}{4}l\left(\frac{x^2 + 2y^2}{x^2}\right) = lc$$
$$lx + \tfrac{1}{4}l(x^2 + 2y^2) - \tfrac{1}{2}lx = lc$$
$$\tfrac{1}{2}lx + \tfrac{1}{4}l\,(x^2 + 2y^2) = lc$$
$$lx + \tfrac{1}{2}l\,(x^2 + 2y^2) = 2lc$$
$$lx \cdot (x^2 + 2y^2)^{\frac{1}{2}} = lc^2$$
$$x \cdot \sqrt{x^2 + 2y^2} = c^2$$

92.

Aufgabe. Man integrire folgende Gleichung:

$$(x + y)\,dx + (y - x)\,dy = 0.$$

Auflösung. Da diese Differentialgleichung homogen ist, so setze man wieder $y = tx$ etc., so erhält man:

$$\frac{dx}{x} + \frac{t-1}{1+t^2} \cdot dt = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{tdt}{1+t^2} = \frac{dt}{1+t^2}$$

$$lc + lx + \tfrac{1}{2}l(1+t^2) = \text{Arc tg } t$$

$$lc + lx + l\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \text{Arc tg } \frac{y}{x}$$

$$lc \cdot (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = \text{Arc tg } \frac{y}{x}$$

$$c\sqrt{x^2 + y^2} = e^{\text{Arc tg } \frac{y}{x}}.$$

93.

Auch in Fällen, wo die Differentialgleichung nicht homogen ist, gelingt die Integration oftmals durch passende Substitutionen. Man habe z. B. die Gleichung:

$$adx = (y - x)\,dy.$$

Setzt man $y - x = u$, mithin: $dx = dy - du$, so ist:

$$ady - adu = udy$$

$$dy = \frac{adu}{a-u}$$

$$y = c - al(a-u)$$

$$y = c - al(a+x-y).$$

In Cauchy's leçons kommen viele künstliche Integrationen durch wiederholte Substitutionen vor.

94.

Eine hieher gehörende merkwürdige Integration gewährt noch eine zuweilen vorkommende Differentialgleichung von der Form:

$$dy + y \cdot F(x)\,dx = f(x)\,dx$$

worin $F(x)$ und $f(x)$ gewisse Functionen von x sind.

Diese Gleichung, welche sehr unpassend, linear genannt wird, lässt sich auf verschiedene Weise integriren.

Betrachtet man y als Product zweier noch zu bestimmenden

unbekannten Functionen von x, die wir kurz mit t und z bezeichnen wollen und setzen also:

$$y = tz, \text{ mithin: } dy = zdt + tdz, \text{ so ist:}$$

$$zdt + tdz + tzF(x)dx = f(x)dx$$

$$[tdz + tz \cdot F(x) \cdot dx] + [zdt - f(x)dx] = 0.$$

Dieser Gleichung wird offenbar Genüge geleistet, wenn jeder der eingeklammerten Theile für sich $= 0$ ist. Dies giebt uns zur Bestimmung der beiden Functionen t und z die beiden Bedingungsgleichungen:

$$tdz + tz \cdot F(x) \cdot dx = 0 \qquad zdt - f(x) \cdot dx = 0$$

$$\frac{dz}{z} = -F(x)dx \qquad dt = \frac{f(x)dx}{z}$$

$$lz = -\int F(x)dx \qquad dt = \frac{f(x)dx}{e^{-\int F(x)dx}}$$

$$z = e^{-\int F(x)dx} \qquad t = \int f(x)dx \cdot e^{\int F(x)dx}$$

$$y = e^{-\int F(x)dx} \cdot \int f(x)dx \cdot e^{\int F(x)dx}$$

II. Differentialgleichungen erster Ordnung höhern Grades.

95.

Wegen der Schwierigkeiten, welche die Auflösung der höhern Gleichungen verursacht, müssen wir uns hier auf die Integration der Differentialgleichungen zweiten Grades (§ 85) beschränken, um so mehr, da schon diese oft mit grossen Schwierigkeiten verbunden ist. Von den Methoden, welche man hier aufgestellt hat, merke man sich folgende drei:

96.

1. Methode. Indem man die Wurzeln sucht, d. h. auf den Differentialquotienten reducirt. Man habe z. B. folgende Differentialgleichung zweiten Grades:

$$dy^2 - ax\,dx^2 = 0, \text{ so ist:}$$

$$\frac{dy^2}{dx^2} = ax$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{ax}$$

$$dy - \sqrt{ax} \cdot dx = 0; \qquad dy + \sqrt{ax} \cdot dx = 0.$$

Die vorgegebene Differentialgleichung zerfällt also in zwei verschiedene, deren Product sie ist. Es müssen also auch zwei Integralgleichungen ihr Genüge leisten. Diese sind hier:

$$y - \tfrac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + c_1 = 0; \qquad y + \tfrac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + c_2 = 0.$$

Beide Gleichungen lassen sich aber auch, wenn man will, in eine einzige, gleichsam allgemeinere Integralgleichung, zusammenfassen, nämlich (höhere Geometrie Pag. 26, 4):

$$(y - \tfrac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + c_1)(y + \tfrac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + c_2) = 0,$$

oder auch, weil die Constanten beliebig sind, also auch gleich sein können $c_1 = c_2 = c$:

$$(y + c - \tfrac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}})\ (y + c + \tfrac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}) = 0$$

$$(y + c)^2 = \tfrac{4}{9}ax^3.$$

Anmerkung. Es ist klar, dass eine Differentialgleichung erster Ordnung n^{ten} Gerades im Allgemeinen n verschiedene Wurzeln hat, mithin auch n verschiedene Integralgleichungen, so wie auch deren Product ihr Genüge leisten müssen. Die n Wurzeln zu finden, gelingt aber selten, und wenn man sie auch hat, noch seltener die Integration derselben.

97.

2. Methode. Wenn die Coefficienten der Differentiale blosse Functionen von einer und derselben veränderlichen Grösse z. B. von x sind. Alsdann kann man auch, $\frac{dy}{dx} = p$ gesetzt, die Differentialgleichung auf x reduciren und x als Function von p ausdrücken. Angenommen es sei:

$$x = \varphi(p) \cdots\cdots (1)$$

Weil nun $\frac{dy}{dx} = p$, mithin:

$$dy = pdx \cdots\cdots (2)$$

so giebt letztere Gleichung integrirt (§ 9):

$$y = px - \int xdp \cdots\cdots (3)$$

Setzt man in (3) statt x seinen Werth aus (1), so ist:

$$y = p \cdot \varphi(p) - \int \varphi(p)dp + c \cdots\cdots (4)$$

Lässt sich nun die in (4) angedeutete Integration wirklich ausführen und dann aus (1) und (4) p eliminiren, so hat man eine oder mehrere primitive Gleichungen zwischen x, y.

98.

3. Methode. Durch Differentiation, wenn die Differential-Gleichung sich zufällig auf die Form:

$$y = px + \varphi(p) \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

bringen lässt, wo $p = \frac{dy}{dx}$ und $\varphi(p)$ irgend eine Function von p ist. Denn differentiirt man die Gleichung (1), so kommt:

$$dy = pdx + xdp + \varphi'(p)dp$$

oder weil $dy = pdx$ ist:

$$[x + \varphi'(p)] \cdot dp = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

Dieser Gleichung kann auf zweierlei Weise Genüge geleistet werden, nämlich für:

$$dp = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

$$x + \varphi'(p) = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

Aus (3) folgt durch Integration $p = c$. Substituiren wir diese für p gefundene Constante c, welche offenbar ganz willkürlich ist, in (1), so haben wir eine der Differentialgleichung (1) entsprechende Integralgleichung zwischen x, y nnd der willkürlichen Constante c, nämlich:

$$y = cx + \varphi(c) \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

Reduciren wir dagegen (4) auf p, so erhalten wir p als Function von x; angenommen es sei $p = \psi(x)$. Wird nun auch dieser Werth (Werthe) von p in (1) substituirt, so erhalten wir noch eine andere (mehrere) der Gleichung (1) Genüge leistenden Gleichung zwischen x und y nämlich:

$$y = x \cdot \psi(x) + \varphi\,[\psi(x)] \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

welche aber aus dem Grunde kein wirkliches Integral der Gleichung (1) genannt werden kann, weil sie keine willkürliche Constante enthält, die zu jedem Integrale erforderlich ist.

Alle solche ohne Integration gefundenen Gleichungen, welche einer Differentialgleichung Genüge leisten, nennt man

besondere Auflösungen, zur Unterscheidung von den durch wirkliches Integriren gefundenen Integralgleichungen. (Wir werden im nächsten Buche diesen merkwürdigen besondern Auflösungen eine geometrische Bedeutung unterbreiten.)

99.

Aufgabe. Man integrire folgende Differentialgleichung:

$$ydx - xdy = a\sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Auflösung. Hier lässt sich am besten die 3. Methode anwenden. Man hat nämlich:

$$y = px + a\sqrt{1 + p^2} \cdot \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$dy = pdx + xdp + \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}} \cdot dp$$

$$\left(x + \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}}\right) \cdot dp = 0 \cdots\cdots\cdots (2)$$

Aus $dp = 0$ folgt: $p = c$ und in (1) substituirt, die Integralgleichung:

$$y = cx + a\sqrt{1 + c^2} \cdots\cdots\cdots (1)$$

Aus $x + \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}} = 0$, folgt: $p = \pm \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ und in (1) substituirt, als besondere Auflösung:

$$y = \sqrt{a^2 - x^2} \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

III. Differentialgleichungen höherer Ordnungen.

100.

Es ist wohl vorauszusehen, dass die Integration der Differentialgleichungen höherer Ordnungen noch bedeutend schwieriger sein muss, als die der ersten Ordnung. In der That giebt es auch hier nur sehr wenige und ganz besondere Fälle, wo die Integration möglich ist. Die wichtigsten dieser besondern Art Gleichungen (von denen die Mechanik einige aufgestellt hat) wollen wir hier in einer gewissen Ordnung folgen lassen. Der Kürze und des leichtern Ueberblicks halber, bezeichnen wir die Differential-Quotienten $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots$ wie üblich mit $p, q, r, \cdots$, so dass also:

$$\frac{dy}{dx}=p; \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=q; \quad \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{dq}{dx}=r; \text{ etc.}$$

101.

1. **Fall.** Wenn ein Differentialquotient als Function des nächst vorhergehenden gegeben ist:

$$\frac{d^ny}{dx^n}=\varphi\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

Alsdann drücke man den höchsten Differentialquotienten als Differential des nächst vorhergehenden aus etc., bis man, wie folgende Beispiele zeigen, auf eine primitive Gleichung zwischen x und y kommt, indem wir auch hier wieder x als die unabhängig Veränderliche betrachten.

102.

Aufgabe 1. Man integrire folgende Gleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\varphi\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

Auflösung. Hier ist: $q=\varphi(p)$, also $\frac{dp}{dx}=\varphi(p)$, folglich:

$$dx=\frac{dp}{\varphi(p)}$$

$$x=\int\frac{dp}{\varphi(p)}+c_1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

Ferner ist $dy=pdx$, und hierin den Werth von dx gesetzt:

$$dy=\frac{pdp}{\varphi(p)}$$

$$y=\int\frac{pdp}{\varphi(p)}+c_2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

Lassen sich nun beide angedeutete Integrationen ausführen, so erhält man durch Elimination des Differentialquotienten p aus (1) und (2) — vorausgesetzt, dass auch diese Elimination möglich ist — die verlangte Gleichung zwischen x, y und den beiden Constanten c_1 und c_2.

103.

Aufgabe 2. Man integrire die Gleichung:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \varphi\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

Auflösung. Hier ist $r = \varphi(q)$, also $\frac{dq}{dx} = \varphi(q)$, mithin:

$$dx = \frac{dq}{\varphi(q)}$$

$$x = \int \frac{dq}{\varphi(q)} + c_1 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

Ferner $dp = q\,dx = q \cdot \frac{dq}{\varphi(q)}$, mithin:

$$p = \int \frac{q dq}{\varphi(q)} + c_2$$

Ferner $dy = p \cdot dx = \frac{dq}{\varphi(q)} \left\{ \int \frac{q dq}{\varphi(q)} + c_2 \right\}$ mithin:

$$y = \int \frac{dq}{\varphi(q)} \left\{ \int \frac{q dq}{\varphi(q)} + c_2 \right\} + c_3 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

Aus (1) und (2) muss nun q eliminirt werden, um die Gleichung zwischen x und y zu erhalten.

Anmerkung, Cauchy stellt noch höhere Differentialquotienten auf (leçons, pag. 649 etc.)

104.

Beispiel. Man integrire die Gleichung:

$$d^2y = dx\sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Auflösung. Man hat hier zuerst:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$$

$$q = \sqrt{1 + p^2}$$

$$\frac{dp}{dx} = \sqrt{1 + p^2}$$

$$dx = \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}}$$

$$x = c_1 + l(p + \sqrt{1+p^2}) \cdots\cdots\cdots (1)$$

$$dy = p\,dx = \frac{p\,dp}{\sqrt{1+p^2}}$$

$$y = c_2 + \sqrt{1+p^2} \cdots\cdots\cdots (2)$$

$$p = \sqrt{(y-c_2)^2 - 1}$$

$$x = c_1 + l\left[y - c_2 + \sqrt{(y-c_2)^2 - 1}\right]$$

105.

2. Fall. Wenn ein Differentialquotient als Function des vorvorhergehenden gegeben ist:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \varphi\left(\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}}\right)$$

Dann benutze man die aus § 100 durch Elimination von dx folgenden Gleichungen:

$$p\frac{dp}{dy} = q; \qquad q\frac{dq}{dp} = r; \text{ etc. etc.}$$

106.

Aufgabe 1. Man integrire zuerst folgende Gleichung:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \varphi(y)$$

Auflösung. Man hat hier; $q = \varphi(y)$, mithin:

$$p\frac{dp}{dy} = \varphi(y)$$

$$p\,dp = \varphi(y)\,dy$$

$$\tfrac{1}{2}p^2 = \int \varphi(y)\,dy$$

$$p = \sqrt{\left[2 \cdot \int \varphi(y)\,dy\right]}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{2\int \varphi(y)dy}$$

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{2\int \varphi(y)\,dy}}$$

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{2\int \varphi(y)\,dy}}$$

107.

Aufgabe 2. Man integrire folgende Gleichung:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \varphi\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

Auflösung. Hier ist:

$$q\frac{dq}{dp} = \varphi(p) \qquad dx = \frac{dp}{\sqrt{2\int\varphi(p)\,dp}}$$

$$q\,dq = \varphi(p)\,dp \qquad x = \int\frac{dp}{\sqrt{2\int\varphi(p)\,dp}} \cdots\cdots (1)$$

$$\tfrac{1}{2}q^2 = \int\varphi(p)\,dp$$

$$q = \sqrt{2}\cdot\int\varphi(p)\,dp \qquad dy = p\,dx = \frac{p\,dp}{\sqrt{2\int\varphi(p)\,dp}}$$

$$\frac{dp}{dx} = \sqrt{2}\int\varphi(p)\,dp \qquad y = \int\frac{p\,dp}{\sqrt{2\int\varphi(p)\,dp}} \cdots\cdots (2)$$

Aus (1) und (2) muss nun p eliminirt werden.

108.

3. **Fall.** Wenn $\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi\left(x, \frac{dy}{dx}\right)$, so setze $q = \frac{dp}{dx}$ und wenn $\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi\left(y, \frac{dy}{dx}\right)$, so setze $q = p\frac{dp}{dy}$.

Beispiel. Es sei:

$$x\,d^2y = dx\,dy + x^2dx^2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dx} + x$$

$$q = \frac{1}{x}\cdot p + x$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p}{x} + x$$

$$x\,dp = p\,dx + x^2dx$$

$$\frac{x\,dp - p\,dx}{x^2} = dx$$

$$\frac{p}{x} = x + c_1$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + c_1x$$

$$y = \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}c_1x^2 + c_2$$

Achtes Buch.

Bestimmung krummer Linien aus gegebenen Eigenschaften.

109.

Aus der Gleichung einer krummen Linie kann man, durch Hülfe der Differentialrechnung, Eigenschaften derselben finden, z. B. Maxima und Minima der Ordinaten, Wendungspuncte, Länge der Subtangente etc. Umgekehrt kann man auch aus Eigenschaften einer krummen Linie, die durch Differentialgleichungen gegeben sind, die krumme Linie selbst, d. h. ihre Gleichung finden, wie folgende Beispiele zeigen werden.

110.

Aufgabe 1. Eine krumme Linie zu finden, deren Subtangente immer gleich dem *m*fachen der Abscisse ist.

Auflösung. Zufolge D.-R. § 49 ist die Formel für die Subtangente: $y \cdot \frac{dx}{dy} = S_t$, mithin muss sein:

$$y \frac{dx}{dy} = mx$$

$$m \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$m\, l\, y = lx + lc = lcx$$

$$y^m = cx$$

111.

Aufgabe 2. Die krumme Linie anzugeben, deren Subnormale gleich der Abscisse ist.

Auflösung. Aus $S_n = y\frac{dy}{dx} = x$ folgt:

$$y^2 + 2c = x^2 \text{ oder } 2c = a^2 \text{ gesetzt,}$$

$$y = \sqrt{x^2 - a^2}$$

112.

Aufgabe 3. Eine Linie von der Beschaffenheit zu finden, dass das Quadrat der Subtangente gleich dem Product aus der Abscisse und einer constanten Grösse a ist.

Auflösung. Man hat hier:

$$y^2\frac{dx^2}{dy^2} = ax$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{\sqrt{ax}}$$

$$ly - lc = 2\sqrt{\frac{x}{a}}$$

$$y = c \cdot e^{2\sqrt{\frac{x}{a}}}$$

113.

Aufgabe 4. Die krumme Linie zu finden, deren Subtangente gleich dem Ueberschuss der Ordinate über die Abscisse ist.

Auflösung. Aus $y\frac{dx}{dy} = y - x$ folgt:

$$ydx = (y - x)\,dy$$

Setzt man $x = ty$, mithin: $dx = ydt + tdy$, so ist:

$$\frac{dy}{y} + \frac{dt}{2t-1} = 0$$

$$ly + \tfrac{1}{2}l(2t - 1) = lc$$

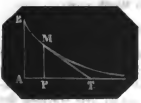
$$ly + \tfrac{1}{2}l\left(\frac{2x-y}{y}\right) = lc$$

$$ly^2 + l\left(\frac{2x-y}{y}\right) = lc^2$$

$$l(2xy - y^2) = lc^2$$

$$2xy - y^2 = c^2$$

114.



Aufgabe 5. Eine krumme Linie von der Beschaffenheit zu finden, dass die Tangenten für alle Puncte derselben gleich lang, $= a$ sind.

Auflösung. Zufolge Different.-Rechn. § 49 ist:

$$y\sqrt{1+\frac{dx^2}{dy^2}}=a$$

$$dx=\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}\,dy$$

Setze $\sqrt{a^2-y^2}=ty$, so ist: $y=\dfrac{a}{\sqrt{1+t^2}}$ und

$$x=\int t\,dy=ty-\int y\,dt$$

$$x=ty-a\int\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$x=ty-a\,l\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)+c$$

$$x=\sqrt{a^2-y^2}-a\,l\left(\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}\right)+c$$

Nehmen wir die Constante (weil sie ja beliebig ist) so, dass für $x=0$, $y=a$ wird, so ist $c=0$ und dann

$$x=\sqrt{a^2-y^2}-a\,l\left(\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}\right)$$

Diese krumme Linie wird die tractoria genannt. Man kann sie sich nämlich entstanden denken, indem das Ende A einer unbiegsamen gewichtslosen geraden Linie $AB=a$, dessen Endpunct B aber schwer ist, längs der Abscissenlinie fortgezogen wird, alsdann wird der schwere Endpunct B mit fortgezogen und — da die augenblickliche Richtung in seiner Bewegung immer die Tangente ist — die tractoria beschreiben.*)

*) Ein in England etablirter Frankfurter Mechanicus soll Hähne, Zapfen und Achsen nach der tractoria construirt und darauf ein Patent genommen haben.

Sucht man die Fläche der tractoria, so folgt aus $dz = y dx$ (§ 26), wenn man hierin für dx seinen Werth setzt:

$$dz = -\sqrt{a^2 - y^2} \cdot dy$$

Wir müssen das Differential hier negativ nehmen, weil wir die Fläche z als Function der Ordinate y betrachten und z, wie die Figur zeigt, mit wachsender Ordinate abnimmt. Dieser Umstand ist jedes Mal zu berücksichtigen, wo mit dem Wachsen der absolut veränderlichen Grösse, das davon abhängige Quantum, statt auch zu wachsen, umgekehrt abnimmt. Wäre z. B. für vorliegenden Fall $z = F(y)$, so müsste doch, weil nur mit abnehmenden Ordinaten z wächst, für $y + \Delta y$ das Wachsthum von z, nämlich: $\Delta z = F(y + \Delta y) - F(y)$ negativ und mithin auch das Differential von z negativ sein, daher:

$$dz = -\sqrt{a^2 - y^2} \cdot dy$$

$$z = -\int \sqrt{a^2 - y^2}\, dy + c \text{ und (§ 34)}$$

$$z = -\tfrac{1}{2} y \sqrt{a^2 - y^2} - \tfrac{1}{2} a^2 \text{ Arc sin } \frac{y}{a} + c$$

Soll die Fläche von AB angerechnet werden, mithin für $y = a = AB$, $z = 0$ sein, so ist:

$$0 = 0 - \tfrac{1}{2} a^2 \cdot \frac{\pi}{2} + c$$

$$z = \frac{a^2}{4}\pi - \tfrac{1}{2} y \sqrt{a^2 - y^2} - \tfrac{1}{2} a^2 \text{ Arc sin } \frac{y}{a}$$

Setzt man hierin $y = 0$, so hat man für die ganze, sich an der unendlichen Asymptote hin erstreckende Fläche den Ausdruck: $z = \frac{a^2 \pi}{4}$, d. i. den vierten Theil der mit dem Radius $BA = a$ beschriebenen Kreisfläche.

115.

Aufgabe 6. Man sucht eine krumme Linie, in welcher die Tangente der Quadratwurzel aus der Ordinate proportional wächst.

Auflösung. Man hat hier:

$$y\sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}} = \sqrt{ay}$$

$$dx = \sqrt{\frac{a - y}{y}} \cdot dy$$

Setze $\sqrt{\frac{a-y}{y}} = t$, also $y = \frac{a}{1+t^2}$, so findet man:

$$x = \sqrt{ay - y^2} - a \text{ Arc tg} \sqrt{\frac{a-y}{y}} + c$$

Bestimmt man die ganz willkürliche Constante so, dass für $y = a$, $x = 0$ wird, so ist $c = 0$.

116.

Aufgabe 7. Man sucht die krumme Linie, bei welcher das vom Anfangspunct A auf die jedesmalige Tangente gefällte Perpendikel gleich der Abscisse des Berührungspuncts ist.

Auflösung. Ist S_t die Subtangente, τ der Berührungswinkel, also $\sin \tau = \frac{dy}{ds}$ (D.-R. § 56), so hat man:

$$\pm (S_t - x) \sin \tau = x$$

$$\pm \left(y \frac{dx}{dy} - x\right) \frac{dy}{ds} = x$$

$$(ydx - xdy)^2 = x^2 ds^2 = x^2 (dx^2 + dy^2)$$

$$(x^2 - y^2)\, dx + 2xydy = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

Diese Gleichung ist homogen und nach § 91 zu integriren. Durch einen kleinen manchmal anwendbaren Kunstgriff erhält man hier aber das Integral kürzer so: Aus (1) folgt:

$$x^2 dx - y^2 dx + 2xy\, dy = 0$$

$$dx + \frac{2xy\, dy - y^2 dx}{x^2} = 0$$

Das zweite Glied ist offenbar das Differential von $\frac{y^2}{x}$, folglich indem man die Constante mit $2a$ bezeichnet:

$$x + \frac{y^2}{x} = 2a$$

$$y = \sqrt{2ax - x^2}$$

117.

Aufgabe 8. Es wird die krumme Linie verlangt, bei welcher die Tangente immer gleich ist, der vom Anfangspunct nach dem Berührnngspunct gezogenen Linie.

Auflösung. Man hat hier:

$$y\sqrt{1+\frac{dx^2}{dy^2}} = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$y\frac{dx}{dy} = \pm x$$

$$\frac{dy}{y} \mp \frac{dx}{x} = 0$$

$$ly \mp lx = lc$$

Für das obere Zeichen ist $y = cx$. Für das untere Zeichen $xy = c$.

118.

Aufgabe 9. Man sucht die vom Anfangspunct ausgehende krumme Linie, deren vom Bogen, Abscisse und Ordinate begrenzte Fläche gleich Zweidrittel des aus der Abscisse und Ordinate gebildeten Rechtecks ist.

Man hat hier (§ 26):

$$\int ydx = \tfrac{2}{3}xy$$

$$ydx = \tfrac{2}{3}ydx + \tfrac{2}{3}xdy$$

$$2\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$2ly = lx + lc$$

$$y^2 = cx$$

119.

Aufgabe 10. Eine vom Anfangspunct ausgehende krumme Linie zu finden, deren quadrirte Länge gleich dem Product aus der Abscisse und einer constanten Grösse a ist. In Zeichen:

$$s^2 = ax$$

Auflösung. Es ist: $2sds = adx$

$$ds = \frac{adx}{2s}$$

$$\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}\cdot dx = \frac{adx}{2\sqrt{ax}}$$

$$dy = \sqrt{\frac{a-4x}{4x}}\cdot dx$$

Setze $\sqrt{\frac{a-4x}{4x}} = t$, also $x = \frac{\frac{1}{4}a}{1+t^2}$, so ist:

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{ax-4x^2} - \frac{1}{4}a \operatorname{Arc tg}\sqrt{\frac{a-4x}{4x}} + c$$

oder (Trigonometrie § 100, 6):

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{ax-4x^2} - \frac{1}{4}a \operatorname{Arc cos}\sqrt{\frac{4x}{a}} + c$$

Da nun für $x=0$ auch $y=0$ sein soll, so ist $c = \frac{1}{4}a \cdot \frac{1}{2}\pi$. Daher:

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{ax-4x^2} + \frac{1}{4}a\left(\frac{1}{2}\pi - \operatorname{Arc cos}\sqrt{\frac{4x}{a}}\right)$$

oder weil allgemein $\operatorname{Arc sin} u + \operatorname{Arc cos} u = \frac{1}{2}\pi$, mithin $\frac{1}{2}\pi - \operatorname{Arc} \cos u = \operatorname{Arc} \sin u$, so ist kürzer:

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{ax-4x^2} + \frac{1}{4}a \operatorname{Arc sin}\sqrt{\frac{4x}{a}}$$

120.

Vorhergehende und ähnliche Aufgaben, wo nämlich die Länge eines Bogens als Function der Abscisse gegeben ist, lassen sich oftmals leichter auf folgende zuerst von Tortolini gezeigte Weise lösen. (Cauchy's leçons T. II. p. 115.) Es folgt aus:

$$s = \sqrt{ax}$$

$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{x}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

Nennt man θ den Winkel, den die am Endpunct M des Bogens $AM = s$ gelegte Berührungslinie mit der Ordinatenrichtung bildet, so ist (D.-R. § 56):

$$\frac{dx}{ds} = \sin\theta \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

Aus (1) und (2) folgt: $1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{x}} \cdot \sin\theta$, und hieraus:

$$x = \frac{1}{4}a \sin^2\theta \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

$$dx = \frac{1}{2}a \sin\theta \cdot \cos\theta \cdot d\theta$$

Ferner hat man: $\frac{dy}{dx} = \cot\theta$, also:

$$dy = \cot\theta \cdot dx$$
$$dy = \tfrac{1}{2}a \cos^2\theta \cdot d\theta$$
$$dy = \tfrac{1}{2}a\,(\tfrac{1}{2}\cos 2\theta + \tfrac{1}{2})\,d\theta$$
$$y = \frac{a}{8}\sin 2\theta + \frac{a}{4}\cdot\theta \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

Weil für $x = 0$ $\theta = 0$ ist und auch $y = 0$ sein soll, so ist hier keine Constante nöthig.

Aus (3) folgt $\sin\theta = \sqrt{\frac{4x}{a}}$, mithin ist: $\cos\theta = \sqrt{\left(\frac{a-4x}{a}\right)}$ und $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cdot\cos\theta = 2\sqrt{\frac{4x}{a}}\cdot\sqrt{\left(\frac{a-4x}{a}\right)}$, daher:

$$y = \tfrac{1}{2}\sqrt{ax - 4x^2} + \frac{a}{4}\ \text{Arc}\sin\sqrt{\frac{4x}{a}}$$

Setzt man in den beiden Gleichungen:

$$x = \tfrac{1}{4}a\sin^2\theta$$
$$y = \tfrac{1}{8}a\sin 2\theta + \tfrac{1}{4}a\,\theta$$

$2\theta = \omega$ und $\frac{1}{8}a = r$, mithin: $\sin^2\theta = \sin^2\frac{1}{2}\omega = \frac{1}{2}(1 - \cos\omega)$, so hat man:

$$x = r - r\cos\omega$$
$$y = r\omega + r\sin\omega.$$

Die gesuchte krumme Linie ist also die bekannte Cycloide.

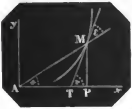
121.

Erklärung. Wenn man in einer Gleichung zweier veränderlichen Grössen x, y und einer Constanten a, dieser Constanten alle möglichen Werthe beilegt und für jeden dieser Werthe die entsprechende krumme Linie über derselben Abscissenlinie und für denselben Anfangspunct construirt denkt, so erhält man (im Allgemeinen) ein System von krummen Linien derselben Art. Denkt man sich noch eine andere Linie, welche jenes System, d. h. jede besondere Linie, nach einem gegebenen Gesetze schneidet, z. B. alle unter demselben Winkel, so wird die schneidende Linie eine **Trajectorie** genannt.*)

*) Jean Bernouilli hat zuerst (1697) die Theorie der Trajectorieen, die sich offenbar auch auf Flächen ausdehnen lässt, aufgestellt. Er wurde durch die von Huyghens aufgestellte Ansicht, dass die Fortpflanzung des Lichts in einer wellenförmigen Bewegung des Aethers bestehe, darauf geführt.

122.

Aufgabe 11. Es sei $\beta = m\alpha$ die Gleichung einer geraden Linie, indem α die laufende Abscisse und β die Ordinate bezeichnet. Lässt man den Coefficienten m sich ändern, so erhält man eine vom Anfangspunct ausgehende Folge von geraden Linien. Man suche die Trajectorie $y = \varphi(x)$, welche alle unter einem gegebenen Winkel $= \varepsilon$ durchschneidet.



Auflösung. Es sei M ein Punct der Trajectorie, dessen Abscisse $AP = x$ und Ordinate $MP = y$. Der Winkel, welchen die durch M an die Trajectorie gelegte Tangente mit der Abscissenachse macht, $= \tau$ und der Winkel MAP $= \theta$, so ist erstlich $\varepsilon = \tau - \theta$ und

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\operatorname{tg} \tau - \operatorname{tg} \theta}{1 + \operatorname{tg} \tau \cdot \operatorname{tg} \theta}$$

Aus der gegebenen Gleichung der geraden Linie $\beta = m\alpha$ folgt: $\frac{d\beta}{d\alpha} = m = \operatorname{tg} \theta$ und da $\operatorname{tg} \tau = \frac{dy}{dx}$, so ist:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\frac{dy}{dx} - m}{1 + m\frac{dy}{dx}}$$

Da nun aber für den Punct M, $\alpha = x$ und $\beta = y$ und der Coefficient m, welcher zu dieser besondern geraden Linie AM gehört, $= \frac{\beta}{\alpha}$ ist, wie aus der Gleichung $\beta = m\alpha$ folgt, so ist:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\frac{dy}{dx} - \frac{\beta}{\alpha}}{1 + \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{dy}{dx}}$$

oder, weil für den Punct M auch x, y statt α, β gesetzt werden kann, und, wenn man Kürze halber $\operatorname{tg} \varepsilon = a$ setzt:

$$a = \frac{\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x} \cdot \frac{dy}{dx}} = \frac{x\,dy - y\,dx}{x\,dx + y\,dy} \cdots\cdots\cdots (1)$$

die Differentialgleichung der gesuchten Trajectorie,*) welche, weil homogen, integrirt werden kann.

$$axdx + aydy = xdy - ydx$$

Setze $\quad y = tx,\ dy = xdt + tdx$

$$a\frac{dx}{x} = \frac{dt}{1 + t^2} - \frac{at}{1 + t^2}\,dt$$

$$alx = \text{Arc tg}\, t - \tfrac{1}{2}al(1 + t^2) + c$$

$$alx = \text{Arc tg}\,\frac{y}{x} - \tfrac{1}{2}al\left(\frac{x^2 + y^2}{x^2}\right) + c$$

oder weil $\tfrac{1}{2}\,al\left(\frac{x^2 + y^2}{x^2}\right) = al(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} - alx$

$$al(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = \text{Arc tg}\,\frac{y}{x} + c$$

Weil die Constante beliebig ist, so setze man $c = 0$ und statt rechtwinkliger Coordinaten Polarcoordinaten, nämlich $\sqrt{x^2 + y^2} = r$ und $\text{Arc tg}\,\frac{y}{x} = \theta$, so ist: $alr = \theta$, also:

$$r^a = e^\theta$$

Soll der Winkel $\varepsilon = 45^0$ sein, so ist $a = 1$, mithin (D.-R. § 61):

$$r = e^\theta.$$

Soll $\varepsilon = 90^0$ sein, so ist $a = \infty$. Aus (1) folgt dann:

$$xdx + ydy = 0$$

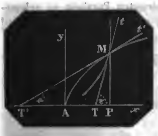
$$x^2 + y^2 = a^2.$$

123.

Aufgabe 12. Es sei $\beta^2 = p\alpha$ die Gleichung der gewöhnlichen Parabel mit dem unbestimmten Parameter p. Giebt man diesem Parameter alle möglichen Werthe von $p = 0$ bis $p = \infty$, so erhält man eine Folge von Parabeln, die alle denselben Scheitel haben und wovon die Achsen die beiden äussersten Parabeln sind. Man sucht die Trajectorie, welche alle Parabeln unter demselben Winkel ε schneidet.

---

*) Die Differentialgleichungen der Trajectorieen sind also vom ersten Grade und erster Ordnung.



Auflösung. Es sei M ein Punct der fraglichen Trajectorie, $AP = x$, $MP = y$. Es sei Tt die Tangente der Trajectorie für den Punct M und $T't'$ die Tangente an der entsprechenden, durch denselben Punct gehenden Parabel.

Nun ist zuvörderst wieder $\varepsilon = \tau - \theta$, also:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\operatorname{tg} \tau - \operatorname{tg} \theta}{1 + \operatorname{tg} \theta \cdot \operatorname{tg} \tau}$$

Nun ist $\operatorname{tg} \tau = \frac{dy}{dx}$, $\operatorname{tg} \theta = \frac{d\beta}{d\alpha}$ und aus $\beta^2 = p\alpha$ folgt: $\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{p}{2\beta}$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\frac{dy}{dx} - \frac{p}{2\beta}}{1 + \frac{p}{2\beta} \cdot \frac{dy}{dx}} \quad \ldots\ldots\ldots$$

Da nun aber für den Punct M die Coordinaten der hindurch gehenden Parabel und der Trajectorie gleich sind $\alpha = x$, $\beta = y$, und der dieser besondern Parabel entsprechende Parameter (wie aus $\beta^2 = p\alpha$) folgt nämlich: $p = \frac{\beta^2}{\alpha}$, also auch für jeden Punct $M(x,y)$ der Trajectorie immer $p = \frac{y^2}{x}$ ist, so kann man, weil der Punct M ganz unbestimmt gelassen, d. h. weil dieselben Schlüsse für jeden andern Punct der Trajectorie und der dadurch gehenden besondern Parabel gelten, die veränderliche Constante p eliminiren und hat dann für die, die Trajectorie bestimmende Differentialgleichung:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\frac{dy}{dx} - \frac{y}{2x}}{1 + \frac{y}{2x} \cdot \frac{dy}{dx}} = \frac{2xdy - ydx}{2xdx + ydy}$$

Soll $\varepsilon = 90^0$ sein, so ist $\operatorname{tg} \varepsilon = \infty$ und

$$ydy + 2xdx = 0$$
$$y^2 + 2x^2 = c$$

124.

Aufgabe 13. Die Trajectorie zu finden, welche alle über

einer gemeinschaftlichen Achse construirten Parabeln so schneidet, dass die Flächeninhalte zwischen jedem Parabelbogen und den Coordinaten des Endpuncts $(= a^2)$ sind.

Auflösung. Sei $M(x, y)$ ein Punct der Trajectorie, so muss (§ 33) $\frac{2}{3}xy = a^2$ sein, und da dies von jedem Puncte der Trajectorie und der dadurch gehenden Parabel gilt, so ist die gesuchte Trajectorie eine Hyperbel, nämlich:

$$y = \frac{\frac{3}{2}a^2}{x}.$$

125.

Aufgabe 14. Man sucht die Trajectorie, welche ähnliche Ellipsen über derselben Abscissen-Achse und aus demselben Anfangspunct construirt, rechtwinklig durchschneidet.

Auflösung. Da die Ellipsen, d. h. ihre Achsen in demselben Verhältniss bleiben sollen, so kann man in $\mathfrak{b} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \alpha^2}$, den constanten Factor $\frac{b}{a} = m$ setzen, dann folgt aus der § 122 aufgestellten allgemeinen Formel:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\operatorname{tg} \tau - \operatorname{tg} \theta}{1 + \operatorname{tg} \tau \cdot \operatorname{tg} \theta}$$

worin $\operatorname{tg} \tau = \frac{dy}{dx}$ und $\operatorname{tg} \theta = \frac{d\mathfrak{b}}{d\alpha} = -\frac{m\alpha}{\sqrt{a^2 - \alpha^2}} = -\frac{m^2\alpha}{\mathfrak{b}}$, mithin:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\frac{dy}{dx} + m^2 \frac{x}{y}}{1 - \frac{dy}{dx} \cdot m^2 \frac{x}{y}}$$

Weil nun $\varepsilon = 90^0$ sein soll, so ist $\operatorname{tg} \varepsilon = \infty$

$$1 - \frac{dy}{dx} \cdot m^2 \frac{x}{y} = 0$$

$$m^2 \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$m^2 ly = lx + lc = lcx$$

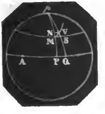
$$y^{m^2} = cx.$$

126.

Aufgabe 15. Eine Gleichung für die loxodromische Linie zu finden, d. h. für diejenige Linie, welche alle Meridiane der

Erde (diese als Kugel angenommen) unter einem gegebenen Winkel ε schneidet.

Auflösung. Es ist hier am bequemsten die Lage der Puncte durch krummlinigte Coordinaten, nämlich durch Länge und Breite anzugeben.



Es sei demnach M ein Punct der Loxodrome, $AP = \lambda$ die auf dem Aequator gemessene Abscisse und $MP = \beta$ die auf dem Meridian gemessene Ordinate.

Wächst $AP = \lambda$ um $PQ = \Delta\lambda$ und $MP = \beta$ um $SV = \Delta\beta$, so ist $MS = \Delta\lambda \cdot \cos \beta$ und für $NMV = MVS = \varepsilon$, näherungsweise: $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\Delta\lambda \cdot \cos\beta}{\Delta\beta}$

und ganz genau:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{d\lambda \cdot \cos\beta}{d\beta}, \text{ hieraus:}$$

$$d\lambda = \operatorname{tg} \varepsilon \cdot \frac{d\beta}{\cos\beta} \text{ und (§ 18):}$$

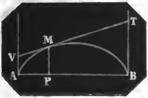
$$\lambda = \operatorname{tg} \varepsilon \cdot l \operatorname{tg} (45 + \tfrac{1}{2}\beta).$$

Soll für $\beta = 0$ auch $\lambda = 0$ sein, so ist keine Constante nöthig. Die Loxodrome geht also in unzähligen Windungen um den Pol (die Kugel) herum. Denn für $\beta = \pm 90^0$ ist $\lambda = \pm \infty$.

Anmerkung. Aufgaben über Trajectorien lassen sich offenbar sehr viele und sehr verschiedenartige aufstellen. (S. Brandes höhere Geometrie 2. Band.) Wir geben jetzt eine andere von Lagrange aufgestellte lehrreiche Aufgabe.

127.

Aufgabe 16. Es ist eine gerade Linie $AB = 2a$ gegeben, und in ihren Endpuncten Perpendikel von unbestimmter Länge errichtet. Man soll nun eine krumme Linie von der Beschaffenheit finden, dass jede daran gezogene Berührungslinie wie VT von den Perpendikeln zwei solche Stücke AV, BT abschneidet, dass das Product daraus immer gleich einer constanten Grösse ist. $AV \cdot BT = b^2$.



Auflösung. Es sei M ein Punct der gesuchten Linie, $AP = x$, $MP = y$, so ist offenbar (indem man durch M

eine mit AB parallele Linie GH gezogen denkt und beachtet, dass $\operatorname{tg} \text{TMH} = \operatorname{tg} \text{VMG} = \frac{dy}{dx}$ ist).

$$\text{BT} = y + (2a - x) \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\text{AV} = y - x\frac{dy}{dx}$$

Mithin ist, $\frac{dy}{dx} = p$ gesetzt, laut Bedingung:

$$(y - px)(y - px + 2ap) = b^2 \dots\dots\dots\dots (1)$$

$$(y - px)^2 + 2ap(y - px) = b^2$$

$$y - px = -ap + \sqrt{b^2 + a^2 p^2}$$

$$y = px - ap + (b^2 + a^2 p^2)^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots\dots (2)$$

Diese Gleichung lässt sich am leichtesten nach § 98 integriren, darnach ist:

$$dy = pdx + xdp - adp + (b^2 + a^2 p^2)^{-\frac{1}{2}} a^2 pdp$$

$$\left(x - a + \frac{a^2 p}{\sqrt{b^2 + a^2 p^2}}\right) \cdot dp = 0 \dots\dots\dots (3)$$

Setzt man den Factor $dp = 0$ und integrirt, so ergiebt sich $p = c$. Setzt man diesen für p gefundenen constanten Werth (der sich wie vorauszusehen nur auf eine gerade Linie beziehen kann) in (2), so hat man:

$$y = cx - ac + \sqrt{b^2 + a^2 c^2} \dots\dots\dots (4)$$

als das allgemeine Integral, welches der Differentialgleichung (1) Genüge leistet, indem man die Werthe von y und $\frac{dy}{dx}$ aus (4) in (1) substituirt. Jede durch einen beliebigen Punct der Linie (4) gezogene Tangente (welche hier offenbar mit der gefundenen Linie, weil sie eine gerade ist, zusammenfällt) schneidet von den Perpendikeln die verlangten Stücke wirklich ab. Denn setzt man $x = 0$, so ist: $y = \text{AV} = -ac + \sqrt{b^2 + a^2 c^2}$, und setzt man $x = 2a$, so ist $y = \text{BT} = ac + \sqrt{b^2 + a^2 c^2}$ und folglich $\text{AV} \cdot \text{BT} = b^2$ wie verlangt.

Setzen wir den andern Factor in (3) nämlich:

$$x - a + \frac{a^2 p}{\sqrt{b^2 + a^2 p^2}} = 0$$

so ergiebt sich durch Elimination von p aus dieser Gleichung und der Differentialgleichung (1) noch eine andere Beziehung zwischen x, y nämlich:

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{2ax-x^2}\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

welche, als besondere Auflösung, der Gleichung (1) ebenfalls Genüge leisten muss (§ 98). So folgt z. B. aus dieser Gleichung:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b}{a}\cdot\frac{a-x}{\sqrt{2ax-x^2}}$$

und wenn man diese Werthe von y und $\frac{dy}{dx}$ in (1) substituirt, so ist für jeden Werth von x das Resultat der linken Seite $=b^2$.

128.

Erklärung. In vorstehendem Paragraphen haben wir zwei verschiedene Gleichungen gefunden, welche beide der Differentialgleichung:

$$\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)\left(y-x\frac{dy}{dx}+2a\frac{dy}{dx}\right)=b^2\cdots\cdots(1)$$

Genüge leisten, nämlich:

$$y=cx-ac+\sqrt{b^2+a^2c^2}\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{2ax-x^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

von welcher die eine eine gerade Linie, die andere eine Ellipse darstellt.

Die Gleichung (2) enthält eine ganz unbestimmt gelassene beliebige Constante c und wird deshalb das allgemeine oder auch vollkommene Integral der Gleichung (1) genannt.

Setzt man statt dieser unbestimmten oder allgemeinen Constanten allerlei verschiedene bestimmte Werthe, c_1, c_2, $c_3\cdots$, so erhält man aus dem allgemeinen Integral (2) ebenso viele sogenannte specielle oder besondere Integrale, welche alle dieselbe Art Linien ausdrücken *) und wovon jede der Differentialgleichung (1) Genüge leistet.

*) Was man unter bestimmten Integral versteht, ist schon früher (§ 80) erklärt. Man unterscheidet demnach dreierlei Arten Integrale, nämlich allgemeines (vollkommenes), specielles und bestimmtes.

Die Gleichung (3) aber, welche ebenfalls der Differentialgleichung (1) Genüge leistet, jedoch keine willkürliche Constante enthält (a und b sind ja gegeben) ist nicht durch Integration, sondern durch Differentiation und Elimination gefunden, und da sie auch nicht aus der allgemeinen Integralgleichung (2) abgeleitet werden kann, welchen Werth man der Constanten c auch beilegen möchte, so ist sie dem Begriffe gemäss weder ein allgemeines noch ein specielles Integral der Gleichung (1) und heisst deshalb auch zur Unterscheidung eine **besondere Auflösung** derselben (§ 98).

129.

Wir sind im Vorhergehenden auf den merkwürdigen Fall gestossen, dass einer und derselben Differentialgleichung zwei verschiedene primitive Gleichungen, nämlich das vollkommene Integral und die besondere Auflösung Genüge leisten. Vor Lagrange's Zeiten waren die besondern Auflösungen so befremdend, dass man sie geradezu für ungereimt und unzulässig erklärte. Lagrange zeigte aber, dass die besondere Auflösung einer Differentialgleichung ebenso gut einen Sinn hat, wie das allgemeine Integral mit willkürlicher Constante, mit welchem es in einer engen Beziehung steht, ja selbst, was hier unmöglich erscheint, aus diesem abgeleitet werden kann. Um jedoch diese nicht leichte Sache aufzuklären und zu begreifen, überlege man erst Folgendes:

130.

Unsere drei in Betracht kommenden Gleichungen waren: (§ 128)

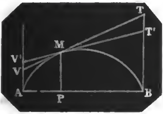
$$\left(y - x\frac{dy}{dx}\right)\left(y - x\frac{dy}{dx} + 2a\frac{dy}{dx}\right) = b^2 \cdots\cdots (1)$$

$$y = cx - ac + \sqrt{b^2 + a^2c^2} \cdots\cdots (2)$$

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2} \cdots\cdots (3)$$

In dem vollkommenen Integral (2), welches eine gerade Linie darstellt, ist die Constante c bekanntlich die trigonom. Tangente des Winkels, unter welchem die gerade Linie die Abscissenlinie schneidet. Giebt man dieser willkürlichen Constante c allerlei bestimmte Werthe c_1, c_2, $c_3 \cdots$, so erhält man ebenso viele besondere gerade Linien (besondere Integrale), welche alle der

Gleichung (1) Genüge leisten und sich je zwei in einem Puncte schneiden.*)



Stellt man sich nun vor, die Constante c sei veränderlich und denkt sich alle durch stetige Veränderung der Constante unmittelbar auf einander folgenden geraden Linien construirt, so müssen offenbar auch die Durchschnittspuncte je zweier unmittelbar auf einander folgenden Linien stetig auf einander folgen und eine gewisse krumme Linie bilden, welche von jeder der geraden Linien offenbar berührt wird oder, was dasselbe sagt, die erwähnte krumme Linie berührt alle geraden. Es entsteht deshalb die Frage nach der Gleichung $y = F(x)$ dieser krummen Linie. Es sei $M(x,y)$ ein beliebiger Punct der krummen Linie und $y = c_, x - ac_, + \sqrt{b^2 + a^2 c_,^2}$ die Gleichung der durch denselben Punct gehenden geraden Linie V'T', so muss die Gleichung der krummen Linie offenbar so beschaffen sein, dass für diesen Punct nicht allein die Coordinaten x, y, sondern auch der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ der krummen Linie mit denen der geraden Linie übereinstimmen und gleichzeitig der Differentialgleichung (1) Genüge leisten. Da dies nun aber, wie wir gesehen haben, mit der besondern Auflösung (3) der Fall ist, so ist diese auch nothwendig die Gleichung der krummen Linie, welche alle geraden berührt.

131.

Hiemit wäre freilich die geometrische Bedeutung der besondern Auflösung (3) der Gleichung (1) erklärt. Die besondere Auflösung ist aber nur beiläufig, gleichsam zufällig gefunden, indem man es doch als Zufall ansehen muss, dass die Differentialgleichung (1) sich auf die § 98 angegebene Form bringen und, wie dort gezeigt, durch Differentiation integriren liess. Man kömmt deshalb leicht auf den Gedanken, ob sich wohl aus einer,

*) Man bemerke, dass der Fall, wo, wie hier in Gleichung (2), die Constante c in einem veränderlichen Gliede vorkömmt, sehr verschieden ist von dem, wo die Constante dem Integral nur mit dem $\pm$ Zeichen hinzugefügt ist. Giebt man z. B. in der Gleichung $y = \alpha x + \beta$ nicht der Constante α, sondern der Constante β allerlei Werthe, so werden alle geraden Linien parallel.

durch wirkliche Integration gefundenen oder auch ganz willkürlich aufgeworfenen Gleichung z. B. die der geraden Linie

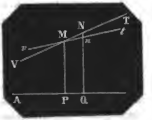
$$y = cx - ac + \sqrt{b^2 + a^2c^2} \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

indem man die in einem veränderlichen Gliede vorkommende Constante c stetig ändert, die Gleichung der krummen Linie ableiten lässt, welche die stetig auf einander folgenden Durchschnittspuncte der aus (1) entspringenden unzähligen Linien bilden.

Deuten wir die zu findende Gleichung der fraglichen krummen Linie vorläufig durch

$$\mathrm{y} = \mathrm{F}(x)$$

an, so ist zuerst klar, dass jede der unzähligen geraden Linien, welche durch die stetige Aenderung der Constante c in (1) entsteht, wegen der stetigen Folge der Durchschnittspuncte, durch die gesuchte krumme Linie berührt wird (Berührung 1sten Grades, D.-R. § 106) und dass also für eine beliebige Abscisse $AP = x$ die Constante c einen solchen Werth haben muss, dass gleichzeitig $\mathrm{y} = y$ und $\frac{dy}{dx} = \frac{d\mathrm{y}}{dx} = \mathrm{F}'(x)$ wird. Es ist mithin die Constante c eine Function von x. Wäre diese Function bekannt, so könnte man sie statt c in (1) substituiren und die resultirende Gleichung würde dann, wie folgende Betrachtung zeigt, die gesuchte sein.



Es sei VT die durch M gehende gerade Linie, welche der Constanten c entspricht, mithin:

$$y = cx - ac + \sqrt{b^2 + a^2c^2} \cdots (1)$$

Lassen wir in (1) x um eine kleine Grösse Δx wachsen, so gelangen wir zu einem anderen Punct N derselben Linie VT. Lassen wir aber in (1) nicht bloss x, sondern gleichzeitig auch c um die kleine Grösse Δc wachsen, so gelangen wir zu einem Punct n einer andern geraden Linie und y wird dann eine Function zweier veränderlichen Grössen, x, c, und man hat (D.-R. § 142):

$$\Delta y = \left(\frac{dy}{dx}\right)\Delta x + \left(\frac{dy}{dc}\right)\Delta c + \cdots\cdots$$

$$\Delta y = c \cdot \Delta x + \left(x - a + \frac{a^2c}{\sqrt{b^2 + a^2c^2}}\right) \cdot \Delta c + \cdots\cdots (2)$$

Nehmen wir nun für ein beliebiges $x = \text{AP}$ der gesuchten krummen Linie, die Constante c so, dass der Coefficient von Δc, nämlich: $x - a + \frac{a^2 c}{\sqrt{b^2 + a^2 c^2}} = 0$ wird, mithin: $c = \frac{b(a-x)}{a\sqrt{2ax - x^2}}$ ist, und lassen zugleich Δc und Δx bis zu Infinitesimalgrössen abnehmen, damit die Glieder mit höhern Potenzen von Δc (und auch von Δx^2, wenn solche da wären) verschwinden, so leuchtet ein, dass die Puncte N und n der Linien VT, rt mit M als ihren Durchschnittspunct zusammen fallen.

Substituiren wir also diesen Werth von c in (1), so kann man daselbst auch y statt y setzen, weil die Puncte n und N zusammen fallen, und weil die aus (1) und (2) folgenden Differentialquotienten gleich sind. Da nun aber der Punct M (die Abscisse x ganz unbestimmt gelassen, dieselben Schlüsse also für jeden Punct der gesuchten krummen Linie gelten, so ist die Gleichung derselben:

$$\text{y} = \frac{b(a-x)}{a\sqrt{2ax - x^2}} \cdot x - a\,\frac{b(a-x)}{a\sqrt{2ax - x^2}} + \sqrt{b^2 + a^2 \cdot \frac{b^2(a-x)^2}{a^2(2ax - x^2)}}$$

was gehörig reducirt, auf die vorhin gefundene besondere Auflösung führt, nämlich:

$$\text{y} = \frac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2}$$

182.

* Ist also die Constante c einer gefundenen Integralgleichung in einem veränderlichen Gliede enthalten (oder durch Umformung hinein gebracht worden), so findet man die noch etwa vorhandene besondere Auflösung (Auflösungen), indem man nur die allgemeine Integralgleichung, d. h. die Glieder derselben, in welchen die Constante c enthalten ist, in Bezug auf c differentiirt, den Factor von dc gleich Null setzt, auf c reducirt und den für c erhaltenen Ausdruck, der eine Function von x oder y, oder von x und y zugleich sein kann, rückwärts substituirt.

Die Theorie der besondern Auflösungen führt auf sehr grosse Weitläufigkeiten, wenn die Differentialgleichung von einer höhern Ordnung oder von einem höhern Grade ist, und wenn — was allerdings möglich ist — die besondere Auflösung daraus direct d. h. ohne erst das allgemeine Integral zu suchen, abgeleitet werden soll. (S. Cauchy's leçons T. II. p. 374.)

133.

* **Aufgabe.** Man sucht eine krumme Linie von der Beschaffenheit, dass für jeden Punct derselben das Quadrat der Normale gleich dem Product aus der Summe der Abscisse und Subnormale und einem constanten Factor a ist. In Zeichen: $N^2 = a(x + S_n)$.

Auflösung. Zufolge D.-R. § 49 ist:

$$y^2\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)=a\left(x+y\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\frac{dy^2}{dx^2}-\frac{a}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{ax-y^2}{y^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{1}{2}a\pm\sqrt{\frac{1}{4}a^2+ax-y^2}}{y}$$

$$ydy=\tfrac{1}{2}adx-\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2+ax-y^2}\cdot dx$$

$$dx=\frac{\frac{1}{2}adx-ydy}{\sqrt{\frac{1}{4}a^2+ax-y^2}}$$

$$x+c=\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2+ax-y^2}$$

$$x^2+2cx+c^2=\tfrac{1}{4}a^2+ax-y^2$$

$$y^2+x^2-(a-2c)x=\tfrac{1}{4}a^2-c^2$$

$$y^2+[x-(\tfrac{1}{2}a-c)]^2=\tfrac{1}{2}a^2-ac\cdots\cdots\cdots(1)$$

Die gesuchte Linie ist also ein Kreis, dessen Mittelpuncts-Abscisse $=\frac{1}{2}a-c$, Mittelpuncts-Ordinate $=0$ und Radius$=\sqrt{\frac{1}{2}a^2-ac}$ (höhere Geom. § 20).

Nimmt man die Constante c veränderlich, d. h. denkt man sich alle besondere Kreise construirt, welche in dem allgemeinen Integral liegen und sucht den geometrischen Ort der stetig auf einander folgenden Durchschnittspuncte, indem man die Gleichung (1) oder auch die vorhergehende in Bezug auf c differentiirt, so folgt aus: $2[x-(\frac{1}{2}a-c)]\cdot dc+adc=0$; $2x+2c=0$, mithin: $c=-x$. Diesen Werth von c wieder in (1) substituirt, ergiebt sich als besondere Auflösung:

$$y=\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2+ax}$$

Die Linie, welche alle Kreise berührt (einhüllt), ist also die gewöhnliche Parabel. Denn schiebt man den Anfangspunct um $\frac{1}{4}a$ zurück und setzt: $x=t-\frac{1}{4}a$, so ist: $y=\sqrt{at}$.

Neuntes Buch.

Ergänzungen zu den im ersten Buche gegebenen Integrationsmethoden.

134.

Wo die im ersten Buche mitgetheilten Methoden, eine Function zu integriren, nicht ausreichen, da ist es auch, ein paar seltene, specielle Fälle abgerechnet, bei dem gegenwärtigen Zustande der Integralrechnung nicht möglich, das Integral in geschlossener Form zu erhalten. Diese wenigen Functionen, bei welchen die Integration durch sinnreiche Kunstgriffe gelungen ist, wollen wir hier nachträglich noch mittheilen, um dadurch den Anfänger, der an dieser fast rein technischen Sache Vergnügen findet, vielleicht zu weitern Speculationen zu veranlassen.

I. Integration der echt gebrochenen rationellen Functionen.

135.

Um zuerst das Integral von $\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ zu erhalten, welches auf verschiedene Weise gefunden worden, ist es am bequemsten, die theilweise Integration anzuwenden. Man hat nämlich (§ 9):

$$\int (x^2+a^2)^{-n} dx = (x^2+a^2)^{-n} x - \int x \cdot -n(x^2+a^2)^{-(n+1)} 2x dx$$

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}$$

$$=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\cdot dx$$

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}-2na^2\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}$$

$$2na^2\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+(2n-1)\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$$

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}=\frac{1}{2a^2n}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+\frac{2n-1}{2a^2n}\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$$

Setzt man jetzt $n+1=m$, mithin $n=m-1$, so erhält man folgende sogenannte Reductionsformel:

$$\text{I.}\quad\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^m}=\frac{1}{2(m-1)a^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^{m-1}}+\frac{2m-3}{2(m-1)a^2}\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{m-1}}$$

nach welcher man das ursprüngliche Integral auf ein anderes von derselben Form reducirt, in welchem der Exponent m um eine Einheit niedriger ist. Durch wiederholte Anwendung dieser Formel kömmt man, weil m eine ganze Zahl, zuletzt auf das bekannte Integral:

$$\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{Arctg}\frac{x}{a}$$

Man hat z. E. für $m=3$:

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^3}=\frac{1}{4a^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^2}+\frac{3}{4a^2}\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$$

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}=\frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{1}{2a^2}\int\frac{dx}{x^2+a^2}$$

$$=\frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{1}{2a^2}\cdot\frac{1}{a}\operatorname{Arctg}\frac{x}{a},\text{ mithin:}$$

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^3}=\frac{x}{4a^2(x^2+a^2)^2}+\frac{3x}{8a^4(x^2+a^2)}+\frac{3}{8a^5}\operatorname{Arc\,tg}\frac{x}{a}$$

Anmerkung. Das Integral $\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^m}$ lässt sich leicht

auf die vorstehende Reductionsformel zurückführen. Man hat nämlich: $x+\frac{1}{2}p=u$, $dx=du$ und $q-\frac{1}{4}p^2=a^2$ gesetzt:

$$\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^m}=\int\frac{dx}{[(x+\frac{1}{2}p)^2+q-\frac{1}{4}p^2]^m}=\int\frac{du}{(u^2+\alpha^2)^m}$$

136.

Ganz auf dieselbe Weise findet man auch die folgende Reductionsformel:

$$\text{II.}\int\frac{dx}{(a^2-x^2)^m}=\frac{x}{2(m-1)a^2\cdot(a^2-x^2)^{m-1}}+\frac{2m-3}{2(m-1)a^2}\int\frac{dx}{(a^2-x^2)^{m-1}}$$

Hiebei kömmt man zuletzt auf das bekannte Integral:

$$\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\cdot l\frac{a+x}{a-x}$$

137.

Setzt man: $\frac{x^p dx}{(x^2+a^2)^m}=x^{p-1}\cdot\frac{xdx}{(x^2+a^2)^m}$

und: $\frac{x^p dx}{(a^2-x^2)^m}=x^{p-1}\cdot\frac{xdx}{(a^2-x^2)^m}$

nennt den ersten Factor u, den andern dv und integrirt nach § 9, so erhält man noch folgende zwei Reductionsformeln:

$$\text{III.}\int\frac{x^p dx}{(x^2+a^2)^m}=-\frac{x^{p-1}}{2(m-1)(x^2+a^2)^{m-1}}+\frac{p-1}{2(m-1)}\int\frac{x^{p-2}dx}{(x^2+a^2)^{m-1}}$$

$$\text{IV.}\int\frac{x^p dx}{(a^2-x^2)^m}=\frac{x^{p-1}}{2(m-1)(a^2-x^2)^{m-1}}-\frac{p-1}{2(m-1)}\int\frac{x^{p-2}dx}{(a^2-x^2)^{m-1}}$$

138.

Das Integral von $\frac{x^p}{x^n-1}\cdot dx$ findet man durch Zerlegung des Factors von dx in Partialbrüche.

Zufolge Analysis § 131 sind sämmtliche n Wurzeln der Gleichung $x^n-1=0$ durch die Formel:

$$x=\cos\frac{2k\pi}{n}\pm i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

gegeben, indem man hierin, je nachdem n gerade oder ungerade,

$k = 0, 1, 2, 3 \cdots \frac{1}{2}n$ oder $k = 0, 1, 2, 3 \cdots \frac{1}{2}(n-1)$ setzt. Die zweitheiligen einfachen Factoren von $x^n - 1$, d. h. die Nenner der gesuchten Partialbrüche sind mithin:

$$x - \cos\frac{2k\pi}{n} - i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

$$x - \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

Ist n gerade, so giebt es für $k = 0$ und $k = \frac{1}{2}n$ zwei reelle Nenner $x - 1$ und $x + 1$, die andern sind alle gepaart. Ist n ungerade, so giebt es nur einen rellen Nenner, nämlich $x - 1$, für $k = 0$. Die andern Nenner sind gepaart vorhanden.

Seien nun $A_1, A_2 \cdots A_n$ die Zähler der n Partialbrüche, welche, weil die Nenner Formen ersten Grades sind, nothwendig constant sein müssen (Anal. § 142), so hat man:

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^p}{x^n-1} = \frac{A_1}{x-1} &+ \frac{A_2}{x - \cos\frac{2\pi}{n} - i\sin\frac{2\pi}{n}} + \frac{A_3}{x - \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}} \\ &+ \frac{A_4}{x - \cos\frac{4\pi}{n} - i\sin\frac{4\pi}{n}} + \frac{A_5}{x - \cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n}} \\ &+ \cdots\cdots\end{aligned}\right\}\cdots(1)$$

Ist n ungerade, so sind, den ersten Bruch $\frac{A_1}{x-1}$ ausgenommen, je zwei Brüche gepaart vorhanden. Ist n gerade, so ist der erste Bruch $\frac{A_1}{x-1}$ und der letzte $\frac{A_n}{x+1}$.

Um den Zähler A_1 zu finden, multiplicire man die ganze Gleichung mit $x - 1$ und setze dann $x = 1$ (Anal. § 143), dann ist (weil $x - 1 = 0$ und $x^n - 1 = 0$):

$$A_1 = \frac{x^p(x-1)}{x^n-1} = \frac{0}{0}, \text{ mithin (D.-R. § 63):}$$

$$A_1 = \frac{(x-1)p \cdot x^{p-1} + x^p}{nx^{n-1}} = \frac{x^p}{nx^{n-1}} = \frac{x^{p+1}}{nx^n}$$

$$A_1 = \frac{1}{n} \text{ (weil } x^n = 1 \text{ und } x^{p+1} = 1)$$

Um A_2 zu finden, multiplicire man mit $x - \cos\frac{2\pi}{n} - i\sin\frac{2\pi}{n}$ und setze dann $x = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$, dann ist (weil $x^n = 1$)

$$A_2 = \frac{x^p.\left(x - \cos\frac{2\pi}{n} - i\sin\frac{2\pi}{n}\right)}{x^n - 1} = \frac{0}{0}$$

$$A_2 = \frac{\left(x - \cos\frac{2\pi}{n} - i\sin\frac{2\pi}{n}\right)px^{p-1} + x^p}{nx^{n-1}}$$

$$A_2 = \frac{x^p}{nx^{n-1}} = \frac{x^{p+1}}{nx^n} = \frac{\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^{p+1}}{n}$$

$$A_2 = \frac{1}{n}\left\{\cos\frac{2(p+1)\pi}{n} + i\sin\frac{2(p+1)\pi}{n}\right\} \text{(Anal. § 88)}$$

Ebenso hat man für:

$$A_3 = \frac{1}{n}\left\{\cos\frac{2(p+1)\pi}{n} - i\sin\frac{2(p+1)\pi}{n}\right\}$$

$$A_4 = \frac{1}{n}\left\{\cos\frac{4(p+1)\pi}{n} + i\sin\frac{4(p+1)\pi}{n}\right\}$$

$$\vdots$$

Sind allgemein M und N die Zähler zweier Brüche mit den gepaarten Nennern $x - \cos\frac{2k\pi}{n} - i\sin\frac{2k\pi}{n}$ und $x - \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$, so ist:

$$M = \frac{1}{n}\left[\cos\frac{2k(p+1)\pi}{n} + i\sin\frac{2k(p+1)\pi}{n}\right] \text{ und}$$

$$N = \frac{1}{n}\left[\cos\frac{2k(p+1)\pi}{n} - i\sin\frac{2k(p+1)\pi}{n}\right]$$

und die beiden Brüche selbst also:

$$\frac{\frac{1}{n}\cdot\cos\frac{2k(p+1)}{n}\pi + \frac{1}{n}\cdot i\sin\frac{2k(p+1)}{n}\pi}{x\cos - \frac{2k}{n}\pi - i\sin\frac{2k}{n}\pi} = \frac{A + Bi}{x - \alpha - \beta i}$$

$$\frac{\frac{1}{n}\cdot\cos\frac{2k(p+1)}{n}\pi-\frac{1}{n}\cdot i\sin\frac{2k(p+1)}{n}\pi}{x-\cos\frac{2k}{n}\pi+i\sin\frac{2k}{n}\pi}=\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}i}{x-\alpha+\beta i}$$

addirt man beide Brüche, indem man, wie angedeutet, des bequemern Schreibens halber, A, B, $\alpha\beta$, als Stellvertreter setzt, so ist:

$$\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}i}{x-\alpha-\beta i}+\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}i}{x-\alpha+\beta i}=\frac{2\mathrm{A}(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2+\beta^2}-\frac{2\mathrm{B}\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$$

multiplicirt man jeden der beiden gepaarten Brüche oder ihre, rechter Hand stehende Summe mit dx und integrirt, so ist das Integral:

$$=\mathrm{A}\,l\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]-2\mathrm{B}\operatorname{Arc}\operatorname{tg}\frac{x-\alpha}{\beta}$$

oder, für A, B, α, β ihre Werthe zurückgesetzt und beachtet, dass $\cos^2\frac{2k}{n}\pi+\sin^2\frac{2k}{n}\pi=1$:

$$=\left\{\begin{array}{l}+\frac{1}{n}\cos\frac{2k(p+1)}{n}\pi\cdot l\left(x^2-2x\cdot\cos\frac{2k}{n}\pi+1\right)\\[2ex] -\frac{2}{n}\sin\frac{2k(p+1)}{n}\pi\cdot\operatorname{Arc}\operatorname{tg}\dfrac{x-\cos\frac{2k}{n}\pi}{\sin\frac{2k}{n}\pi}\end{array}\right.$$

Denkt man sich die Gleichung (1) mit dx multiplicirt und integrirt, so giebt vorstehende Formel, indem man darin $k=1,2,3\cdots$ setzt, die Summe der Integrale von je zwei gepaarten Brüchen. Setzt man $k=0$, so erhält man das Integral des ersten Bruches $\frac{1}{n}\cdot\int\frac{dx}{x-1}=\frac{1}{n}\,l\,(x-1)$ doppelt. Dies ist natürlich, weil wir bei der paarweisen Vereinigung der Brüche den ersten als zwei Mal vorhanden fingirt haben, nämlich:

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{x-1-0\cdot i}+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{x-1+0\cdot i}=\frac{2}{n}\,\frac{x-1}{(x-1)^2}$$

mit dx multiplicirt und integrirt, ist das Integral also

$$=\frac{1}{n}l(x-1)^2=\frac{2}{n}l(x-1)\text{ statt }\frac{1}{n}l(x-1).$$

Aus demselben Grunde ist, wenn n gerade, auch der letzte Bruch,*) $\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{x+1}$, bei diesem paarweisen Zusammenfassen als zwei Mal vorhanden angenommen. Dies berücksichtigt, hat man folgende allgemeine Reductionsformel:

$$\text{I.}\quad \int\frac{x^p\,dx}{x^n-1}\ \left\{\begin{array}{l} +\frac{1}{n}\cos\frac{2k(p+1)}{n}\pi\cdot l\left(x^2-2x\cdot\cos\frac{2k}{n}\pi+1\right) \\ -\frac{2}{n}\sin\frac{2k(p+1)}{n}\pi\cdot\text{Arc tg}\dfrac{x-\cos\frac{2k}{n}\pi}{\sin\frac{2k}{n}\cdot\pi} \end{array}\right\}$$

worin $k=0,1,2,3\cdots\frac{1}{2}n$ zu setzen und vom ersten positiven Theil jedesmal die Hälfte zu nehmen ist, wenn der zweite negative Theil verschwindet, was, wenn n ungerade, für $k=0$, und wenn n gerade, für $k=0$ und $k=\frac{1}{2}n$ der Fall ist.

Ganz auf dieselbe Weise findet man folgende Reductionsformel (Analysis § 135):

$$\text{II.}\quad \int\frac{x^p\,dx}{x^n+1}=\left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{n}\cos\frac{(2k+1)(p+1)}{n}\pi\cdot l\left(x^2-2x\cdot\cos\frac{2k+1}{n}\pi+1\right) \\ +\frac{2}{n}\cdot\sin\frac{(2k+1)(p+1)}{n}\pi\cdot\text{Arc tg}\dfrac{x-\cos\frac{2k+1}{n}\pi}{\sin\frac{2k+1}{n}\pi} \end{array}\right.$$

bei welcher für ein ungerades n dieselben Bemerkungen gelten.

Beispiel. Sei $p=0$, $n=3$, so ist für $k=0$, $\frac{3-1}{2}$

$$\int\frac{dx}{x^3-1}=\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3}l(x-1)^2+\tfrac{1}{3}\cdot\cos\tfrac{2}{3}\pi\cdot l(x^2-2x\cdot\cos\tfrac{2}{3}\pi+1)$$

$$-\tfrac{2}{3}\sin\tfrac{2}{3}\pi\cdot\text{Arc tg}\frac{x-\cos\frac{2}{3}\pi}{\sin\frac{2}{3}\pi}$$

$$\int\frac{dx}{x^3-1}=\tfrac{1}{6}\cdot l\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\text{Arc tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

---

*) Den Zähler dieses Bruches findet man ebenso, wie den des ersten. Multiplicirt man nämlich die Gleichung (1) mit $x+1$ und setzt dann $x=-1$, so ist:

$$A_n=\frac{x^p(x+1)}{x^n-1}=\frac{0}{0}=\frac{x^p}{nx^{n-1}}=\frac{x^{p+1}}{nx^n}=\frac{1}{n}$$

Anmerkung. Die beiden Formen:

$$\frac{x^p dx}{x^n \pm a^n}, \quad \frac{x^p dx}{ax^n \pm b}$$

lassen sich leicht auf die vorhergehenden zurückführen, indem man im ersten Fall $x = au$ und im andern $x = u \cdot \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$ setzt.

139.

Die im vorhergehenden § erwähnten Functionen lassen sich oftmals leichter durch Substitutionen integriren. Man hat z. B.:

$$\int \frac{x^2 dx}{x^6 + 1} = \frac{1}{3} \int \frac{d \cdot x^3}{1 + (x^3)^2} = \frac{1}{3} \int \frac{du}{1 + u^2} = \frac{1}{3} \operatorname{Arc} \operatorname{tg} x^3$$

$$\int \frac{x dx}{x^4 - a^4} = \frac{1}{2} \int \frac{d \cdot x^2}{(x^2)^2 - a^2} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2 - a^2}$$

$$\int \frac{x dx}{x^4 - a^4} = \frac{1}{4a} l \frac{u - a}{u + a} = \frac{1}{4a^2} l \frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2}$$

II. Integration der irrationalen Functionen.

140.

Wir haben schon § 14 bemerkt, dass es nur sehr wenige irrationale Functionen giebt, deren Integral sich in geschlossener Form darstellen lässt, aus dem einfachen Grunde, weil in den meisten Fällen eine solche Form gar nicht existirt. Zu jenen wenigen irrationalen Functionen gehört die folgende, das sogenannte binomische Differential, welches sich unter zwei dazu günstigen Umständen rational machen lässt, nämlich:

$$x^m (a + bx^n)^{\frac{p}{q}} dx,$$

wo m, n, p, q ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahlen sein mögen.

Erster Fall. Wenn $\frac{m+1}{n}$ eine ganze positive oder negative Zahl ist, dann setze:

$$a + bx^n = z^q, \text{ nithin: } x = \frac{(z^q - a)^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}},$$

$$x^m = \frac{(z^q - a)^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}} \quad \text{und} \quad dx = \frac{(z^q - a)^{\frac{1}{n} - 1} \cdot q z^{q-1} dz}{n b^{\frac{1}{n}}}$$

$$\int x^m (a + bx^n)^{\frac{p}{q}} \cdot dx = \frac{q}{n\, b^{m+1}} \int z^{p+q-1} (z^q - a)^{\frac{m+1}{n} - 1} dz.$$

Ist nun wie vorausgesetzt, $\frac{m+1}{n}$ eine ganze positive Zahl, so kann man das Binom unter dem Integralzeichen entwickeln und hat dann nur eine Reihe von Potenzen zu integriren. Ist $\frac{m+1}{n}$ eine ganze negative Zahl, so erhält man eine rational gebrochene Function.

Zweiter Fall. Wenn $\frac{m+1}{n} + \frac{p}{q}$ eine ganze positive oder negative Zahl ist, dann setze man, weil:

$$x^m (a + bx^n)^{\frac{p}{q}} dx = x^{m + \frac{np}{q}} \cdot (b + ax^{-n})^{\frac{p}{q}} \cdot dx$$

$$b + ax^{-n} = z^q,$$

so wird die Function indem man in dem vorhergehenden Integral $m + \frac{np}{q}$ in m, $-n$ in n, a in b und b in a verwandelt:

$$-\frac{q}{na} \cdot z^{p+q-1} \cdot (z^q - b)^{-\left(\frac{m+1}{n} + \frac{p}{q} + 1\right)} \cdot dz$$

also rational, wenn $\frac{m+1}{n} + \frac{p}{q}$ eine ganze Zahl ist.

Beispiel 1. In $\int x^3 (a^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$ ist $m = 3$, $n = 1$, $\frac{p}{q} = -\frac{1}{2}$, $\frac{m+1}{n} = 2$. Man setze also:

$$a^2 + x^2 = z^2;\; x = (z^2 - a^2)^{\frac{1}{2}};\; dx = z(z^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}} dz$$

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \int (z^2 - a^2) dz = \frac{z^3}{3} - a^2 z$$

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} - a^2 (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}}{3} (x^2 - 2a^2)$$

Beispiel 2. In $\int x^2 (a^2 + x^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot dx$ ist $\frac{m+1}{n} + \frac{p}{q} = -1$.

Man setze also:

$$1 + a^2x^{-2} = z^2;\quad x = \frac{a}{(z^2-1)^{\frac{1}{2}}};\quad dx = -\frac{az\,dz}{(z^2-1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\int x^2\,(a^2+x^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot dx = -\frac{1}{a^2}\int z^{-4}\cdot dz = \frac{1}{3a^2}\cdot\frac{1}{z^3}$$

$$\int x^2\,(a^2+x^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot dx = \frac{1}{3a^2}\cdot\frac{x^3}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

141.

Folgende sechs Reductionsformeln mögen noch bemerkt werden, durch deren wiederholte Anwendung das binomische Integral:

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx$$

wenn die Rationalisirung nicht möglich ist, in günstigen Fällen auf ein bekanntes oder doch einfacheres Integral zurückgeführt werden kann (m, n, p sind beliebig und p jedenfalls ein Bruch).

Es ist zuerst:

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx = x^{m-n+1}\cdot(a+bx^n)^p x^{n-1}dx$$

und durch theilweise Integration:

$$\text{I.}\quad \int x^m(a+bx^n)^p dx = \begin{cases} +\dfrac{x^{m-n+1}\cdot(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)} \\ -\dfrac{m-n+1}{nb(p+1)}\displaystyle\int x^{m-n}\cdot(a+bx^n)^{p+1}dx \end{cases}$$

Nach dieser Formel kann man also gleichzeitig den Exponenten p vergrössern und m verkleinern.

Reducirt man auf das rechter Hand stehende Integral, so ist:

$$\int x^{m-n}\,(a+bx^n)^{p+1}dx = \begin{cases} +\dfrac{x^{m-n+1}\cdot(a+bx^n)^{p+1}}{m-n+1} \\ -\dfrac{nb(p+1)}{m-n+1}\displaystyle\int x^m(a+bx^n)^p dx \end{cases}$$

und wenn man $m-n=m'$, $p+1=p'$, mithin $m=m'+n$, $p=p'-1$ setzt und hernach die Accente wieder weglässt:

$$\text{II.} \quad \int x^m (a+bx^n)^p \, dx = \begin{cases} + \dfrac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{m+1} \\ - \dfrac{nbp}{m+1} \displaystyle\int x^{m+n} \cdot (a+bx^n)^{p-1} dx \end{cases}$$

Will man bloss m verkleinern ohne p zu ändern, so setze man das rechter Hand stehende Integral in I., nämlich:

$$\int x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1} \cdot dx = \int x^{m-n}(a+bx^n)^p (a+bx^n) dx$$

$$= \int [ax^{m-n}(a+bx^n)^p + bx^m . (a+bx^n)^p] dx$$

$$= a\int x^{m-n}(a+bx^n)^p dx + b\int x^m (a+bx^n)^p dx$$

Substituirt man die rechte Seite statt der linken in I., fasst dann die beiden gleichnamigen Integrale in ein Glied zusammen und beachtet, dass $1 + \frac{m-n+1}{n(p+1)} = \frac{m+np+1}{n(p+1)}$, so kommt nach gehöriger Reduction:

$$\text{III.} \quad \int x^m (a+bx^n)^p dx = \begin{cases} + \dfrac{x^{m-n+1} \cdot (a+bx^n)^{p+1}}{b(m+np+1)} \\ - \dfrac{a(m-n+1)}{b(m+np+1)} \displaystyle\int x^{m-n} \cdot (a+bx^n)^p dx \end{cases}$$

Reducirt man diese Formel auf das Integral rechter Hand, so ist:

$$\int x^{m-n} \cdot (a+bx^n)^p dx = \begin{cases} + \dfrac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{a(m-n+1)} \\ - \dfrac{b(m+np+1)}{a(m-n+1)} \displaystyle\int x^m (a+bx^n)^p dx \end{cases}$$

und wenn man $m-n=m'$, also $m=m'+n$ setzt und hernach den Accent wieder weglässt:

$$\text{IV.} \quad \int x^m (a+bx^n)^p dx = \begin{cases} + \dfrac{x^{m+1} \cdot (a+bx^n)^{p+1}}{a(m+1)} \\ - \dfrac{b(m+n+np+1)}{a(m+1)} \displaystyle\int x^{m+n}(a+bx^n)^p dx \end{cases}$$

Will man p vergrössern, ohne m zu verändern, so setze man in IV:

$$x^{m+n} = x^m \frac{(a + bx^n - a)}{b} = x^m \frac{(a+bx^n)}{b} - \frac{a}{b} \cdot x^m, \text{ mithin:}$$

$$x^{m+n} \cdot (a + bx^n)^p = x^m(a + bx^n)^{p+1} - \frac{a}{b} x^m (a + bx^n)^p$$

$$\text{so ist: } \int x^{m+n} \cdot (a+bx^n)^p dx = \begin{cases} +\frac{1}{b}\int x^m(a + bx^n)^{p+1} dx \\ -\frac{a}{b}\int x^m(a + bx^n)^p dx. \end{cases}$$

Substituirt man die rechte Seite statt der linken in IV. und fasst dann die gleichnamigen Integrale in Eins zusammen, so hat man nach gehöriger Reduction:

$$\text{V. } \int x^m(a+bx^n)^p dx = \begin{cases} -\frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{p+1}}{an(p+1)} \\ +\frac{m+n+np+1}{an(p+1)}\int x^m(a+bx^n)^{p+1} dx \end{cases}$$

Um p zu verkleinern, ohne m zu verändern, reducire man V auf das Integrel rechter Hand, so hat man:

$$\int x^m(a+bx^n)^{p+1} dx = \begin{cases} +\frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{p+1}}{m+n+np+1} \\ +\frac{an(p+1)}{m+n+np+1}\int x^m(a+bx^n)^p dx \end{cases}$$

Setzt man $p + 1 = p'$, also $p = p' - 1$, und lässt im Resultat den Accent wieder weg, so ist:

$$\text{VI. } \int x^m \cdot (a+bx^n)^p dx = \begin{cases} +\frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{m+np+1} \\ +\frac{anp}{m+np+1}\int x^m(a+bx^n)^{p-1} dx \end{cases}$$

Anmerkung. Sollte eine dieser 6 Reductionsformeln ein Glied $= \infty$ geben, so ist die Formel unbrauchbar. Es ist dies dann

aber ein Zeichen, dass das binomische Differential sich rational machen lässt und nach § 140 integrirt werden kann.

142.

Aufgabe. Man soll das Integral:

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

finden, wenn m eine ganze Zahl ist.

Auflösung. Hier passt offenbar die Formel III. (§ 141), indem hier $n=2$, $p=-\frac{1}{2}$ ist, daher:

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{m-1}\sqrt{1-x^2}}{m} + \frac{m-1}{m}\int \frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Durch Wiederholung dieser Reduction wird der Exponent m jedesmal um zwei Einheiten kleiner und man kommt zuletzt, je nachdem m gerade oder ungerade ist, auf die bekannten Integrale:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{Arc}\sin x; \qquad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}$$

Es ist hier also allgemein:

1) m gerade.

$$\int \frac{x^m\cdot dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}\left[\frac{1}{m}\cdot x^{m-1} + \frac{1\cdot(m-1)}{(m-2)\cdot m}x^{m-3} + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(m-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots\cdots m}x\right]$$
$$+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(m-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots\cdots m}\text{Arc}\sin x$$

2) m ungerade.

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}\left[\frac{1}{m}x^{m-1} + \frac{1\cdot(m-1)}{(m-2)\cdot m}x^{m-3} + \cdots + \frac{1\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdots(m-1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots m}\right]$$

Hiernach hat man z. B.:

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \tfrac{1}{2}\text{Arc}\sin x$$

$$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}\left[\frac{x^3}{4} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x\right] + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\text{Arc}\sin x$$

$$\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}\left[\frac{x^4}{5} + \frac{1\cdot 4}{3\cdot 5}x^2 + \frac{1\cdot 2\cdot 4}{1\cdot 3\cdot 5}\right]$$

148.

Aufgabe. Man soll das Integral

$$\int \frac{x^m}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

finden, wenn m eine ganze Zahl ist.

Auflösung. Nach Formel IV. (§ 141) hat man:

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^{m+1}\sqrt{1-x^2}}{-m+1} + \frac{m-2}{m-1}\int \frac{x^{m+2}dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Durch Wiederholung dieser Reduction kommt man zuletzt, wenn m ungerade ist, auf

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$$

Um dies Integral zu finden, setze man:

$$\sqrt{1-x^2} = z,\ x = \sqrt{1-z^2},\ dx = -\frac{z\,dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{dz}{1-z^2} = \tfrac{1}{2}\,l\,\frac{1-z}{1+z}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \tfrac{1}{2}\,l\,\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} = l\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$$

Beispiel 1. $$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{-2}}{2}\cdot\sqrt{1-x^2} + \tfrac{1}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{2x^2} + \tfrac{1}{2}\,l\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$$

Beispiel 2. $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}} = -x^{-1}\cdot\sqrt{1-x^2} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^{-3}\cdot\sqrt{1-x^2}}{-3} + \tfrac{2}{3}\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}\cdot\left[\tfrac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^3} + \tfrac{2}{3}\cdot\frac{1}{x}\right]$$

144.

Schliesslich betrachten wir noch als hieher gehörend, das in der Mechanik vorkommende Differential

$$\frac{x^m \cdot dx}{\sqrt{ax - x^2}} = x^m (ax - x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$$

wo m eine ganze Zahl ist.

Durch Umformung desselben in:

$$x^m \cdot x^{-\frac{1}{2}}(a - x)^{-\frac{1}{2}} dx = x^{m-\frac{1}{2}}(a - x)^{-\frac{1}{2}} dx, \text{ hat man:}$$

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{ax - x^2}} = \int x^{m-\frac{1}{2}}(a - x)^{-\frac{1}{2}} dx$$

mithin nach § 141, Formel III., indem hier $n = 1$, $b = -1$, $p = -\frac{1}{2}$ ist und $m - \frac{1}{2}$ statt m steht:

$$\int x^{m-\frac{1}{2}}(a-x)^{-\frac{1}{2}} dx = -\frac{x^{m-\frac{1}{2}}(a-x)^{\frac{1}{2}}}{m} + \frac{a(m-\frac{1}{2})}{m} \int x^{m-\frac{3}{2}}(a-x)^{-\frac{1}{2}} dx$$

oder weil $x^{m-\frac{1}{2}} = x^{m-1} x^{\frac{1}{2}}$ und $x^{m-\frac{3}{2}} = x^{m-1} x^{-\frac{1}{2}}$

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{ax-x^2}} = -\frac{x^{m-1}\sqrt{ax - x^2}}{m} + \frac{a(2m-1)}{2m} \int \frac{x^{m-1} dx}{\sqrt{ax-x^2}}$$

Durch Wiederholung dieser Reduction wird der Exponent m jedesmal um eine Einheit kleiner, und man kommt zuletzt auf das aus § 16, 2, bekannte Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}} = \text{Arc} \sin \frac{2x-a}{a}$$

III. Integration der Kreisfunctionen.

145.

Um zunächst die Integrale der Kreisfunctionen

$$\sin^m x \cdot \cos^n x \, dx, \; \sin^m x \cdot dx, \; \cos^m x \, dx$$

zu finden, wo m und n ganze positive oder negative Zahlen sind, könnte man

$$\sin x = u, \text{ mithin } \cos x = \sqrt{1 - u^2} \text{ und } dx = \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}$$

setzen und dann unmittelbar die in § 141 aufgestellten Reduc-

tionsformeln anwenden. Man kann hier aber auch folgendermaassen verfahren. Es ist zuerst:

$$\sin^m x \cdot \cos^n x\, dx = \sin^{m-1} x \cdot \cos^n x \sin x\, dx$$

folglich nach der theilweisen Integration:

$$\text{I.} \quad \int \sin^m x \cos^n x\, dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cdot \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} \int \sin^{m-2} x \cdot \cos^{n+2} x\, dx$$

Durch diese Reduction wird der Exponent n jedesmal um zwei Einheiten vergrössert und gleichzeitig m um zwei Einheiten verkleinert, was zu Statten kömmt, wenn n negativ und m positiv ist.

Will man bloss m verkleinern, ohne n zu verändern, so setze man in I.:

$$\cos^{n+2} x = \cos^n x\,(1 - \sin^2 x) = \cos^n x - \cos^n x \cdot \sin^2 x\,,$$

so kömmt nach gehöriger Reduction:

$$\text{II.} \quad \int \sin^m x \cos^n x\, dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cdot \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int \sin^{m-2} x \cdot \cos^n x\, dx$$

Reducirt man diese Formel auf das Integral rechter Hand, setzt dann $m-2=m'$, also $m=m'+2$ und schreibt zuletzt wieder m statt m', so ist:

$$\text{III.} \quad \int \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n+1} x}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1} \int \sin^{m+2} x \cos^n x\, dx$$

Reducirt man Formel I. auf das Integral rechter Hand, setzt $m-2=m'$, $n+2=n'$ etc., so ist:

$$\text{IV.} \quad \int \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{\sin^{m+1} x \cdot \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \sin^{m+2} x \cdot \cos^{n-2} x\, dx$$

Setzt man hierin:

$$\sin^{m+2} x = \sin^m x\,(1 - \cos^2 x) = \sin^m x - \sin^m x \cdot \cos^2 x$$

so erhält man durch eine ähnliche Reduction wie für Formel II.

$$\text{V.} \quad \int \sin^m x \cos^n x = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m x \cos^{n-2} x\, dx$$

Reducirt man diese Formel auf das Integral rechter Hand und setzt dann n statt $n-2$, mithin $n+2$ statt n, so ist:

$$\text{VI.} \int \sin^m x \cos^n x\, dx = -\frac{\sin^{m+1} x \cdot \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1} \int \sin^m x \cos^{n+2} x\, dx$$

146.

Setzt man in die II$^{\text{te}}$ der vorstehenden sechs Reductionsformeln $n=0$, so hat man:

$$\int \sin^m x\, dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cdot \cos x}{m} + \frac{m-1}{m} \int \sin^{m-2} x\, dx$$

und durch Wiederholung dieser Reduction:

$$\int \sin^{m-2} x\, dx = -\frac{\sin^{m-3} x \cos x}{m-2} + \frac{m-3}{m-2} \int \sin^{m-4} x\, dx$$

$$\vdots$$

1) m gerade.

$$\text{I.} \int \sin^m x\, dx = -\frac{\cos x}{m}\left[\sin^{m-1} x + \frac{m-1}{m-2} \sin^{m-3} x + \cdots + \frac{3.5..(m-3)(m-1)}{2.4..(m-4)(m-2)} \sin x\right] + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (m-3)(n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots\cdots (m-2)\, m} \cdot x$$

2) m ungerade.

$$\text{II.} \int \sin^m x\, dx = -\frac{\cos x}{m}\left[\sin^{m-1} x + \frac{m-1}{m-2} \sin^{m-3} x + \cdots + \frac{2.4\ldots(m-3)(m-1)}{1.3\ldots(m-4)(m-2)}\right]$$

Setzt man in Formel II. § 145, $m=0$, so giebt dieselbe

1) n gerade.

$$\text{III.} \int \cos^n x\, dx = \frac{\sin x}{n}\left[\cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n-2} \cos^{n-3} x + \cdots + \frac{3 \cdot 5 \cdots (n-3)(n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (n-4)(n-2)} \cos x\right] + \frac{1 \cdot 3 \cdots (n-3)(n-1)}{2 \cdot 4 \cdots\cdots (n-2)\, n} x$$

2) n ungerade.

$$\text{IV.} \int \cos^n x\, dx = \frac{\sin x}{n}\left[\cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n-2} \cos^{n-3} x + \cdots + \left[\frac{2 \cdot 4 \cdots (n-3)(n-1)}{1 \cdot 3 \cdots (n-4)(n-2)}\right]\right]$$

IV. Integration einiger transcendenten Functionen.

147.

Die einzige Regel, welche sich für die Integration transcendenter Differentiale geben lässt, ist: die theilweise Integration oder Substitutionen zu versuchen. Ein paar der wichtigsten Fälle wollen wir hier mittheilen. Man hat z. B. durch theilweise Integration:

$$\int e^x \sin nx \, dx = \sin nx \cdot e^x - n \int e^x \cos nx \, dx$$

$$\int e^x \cos nx \, dx = \cos nx \cdot e^x + n \int e^x \cdot \sin nx \, dx$$

Multiplicirt man letztere Gleichung mit $-n$ und addirt sie dann zur ersten und fasst die gleichnamigen Integrale in Eins zusammen etc., so hat man:

$$\int e^x \sin nx = e^x \left(\frac{\sin nx - n \cos nx}{1 + n^2} \right)$$

Multiplicirt man dagegen die erstere Gleichung mit n und addirt sie dann zur zweiten, so hat man zugleich auch:

$$\int e^x \cos nx \, dx = e^x \cdot \left(\frac{\cos nx + n \sin nx}{1 + n^2} \right)$$

Ebenso findet man:

$$\int x^n \cos x dx = x^n \sin x - n \int x^{n-1} \sin x \, dx$$

$$\int x^{n-1} \sin x dx = -x^{n-1} \cos x + (n-1) \int x^{n-2} \cos x dx$$

Mithin die Reductionsformel:

$$\int x^n \cdot \cos x dx = x^{n-1} (x \sin x + n \cos x) - n(n-1) \int x^{n-2} \cos x \, dx$$

Beispiele:

1. $\int \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \cdot dx = \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \cdot dx = l\,(e^x + e^{-x})$

2. $\int x^m \,(lx)^n = \frac{(lx)^n \cdot x^{m+1}}{m+1} - \frac{n}{m+1} \int x^m . (lx)^{n-1} dx$

3. $$\int \frac{e^x x\,dx}{(1+x)^2} = \int\left(\frac{e^x}{1+x} - \frac{e^x}{(1+x)^2}\right)dx$$

$$\int \frac{e^x x\,dx}{(1+x)^2} = \int \frac{e^x dx}{1+x} - \int \frac{e^x}{(1+x)^2}\,dx$$

$$\int \frac{1}{1+x} e^x\,dx = \frac{1}{1+x}\cdot e^x + \int \frac{e^x}{(1+x)^2}\,dx$$

Letztere beiden Gleichungen addirt, kömmt:

$$\int \frac{e^x \cdot x dx}{(1+x)^2} = \frac{e^x}{1+x}$$

148.

Folgende beiden Integrale verdienen noch bemerkt zu werden, nämlich:

$$\int \sin\,(mx+n)\cos\,(px+q)\,dx \text{ und } \int \frac{dx}{a+b\cos x}$$

Man hat zuerst (Trigon. § 100, 38):

$$\int \sin\,(mx+n)\cdot\cos\,(px+q)\,dx = \tfrac{1}{2}\int \sin\,[(m+p)\,x+n+q]\,dx$$
$$+\tfrac{1}{2}\int \sin\,[(m-p)\,x+n-q]\,dx$$

$$\int \sin\,(mx+n)\cos\,(px+q)\,dx = -\frac{\cos[(m+p)\,x+n+q]}{2\,(m+p)}$$
$$-\frac{\cos[(m-p)\,x+n-q]}{2\,(m-p)}$$

Für das andere Integral hat man, $\cos^2\tfrac{1}{2}x - \sin^2\tfrac{1}{2}x$ statt $\cos x$ gesetzt:

$$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \int \frac{dx}{a+b\cos^2\tfrac{1}{2}x - b\sin^2\tfrac{1}{2}x}$$
$$= \int \frac{\frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}x}\cdot dx}{\frac{a}{\cos^2\frac{1}{2}x} + b - b\cdot \mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}x}$$

und weil $\frac{a}{\cos^2\frac{1}{2}x} = a\,(1+\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}x)$ und $\frac{dx}{\cos^2\frac{1}{2}x} = 2d\,(\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\,x)$

$$\int \frac{dx}{a+b\cdot\cos x} = \int \frac{2\cdot d(\operatorname{tg}\frac{1}{2}x)}{a+b+(a-b)\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}x} \cdots\cdots\cdots (1)$$

Ist nun erstens: $a > b$, dann ist:

$$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{2}{a-b}\int \frac{d\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}{\frac{a+b}{a-b}+\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}x} = \frac{2}{a-b}\int \frac{du}{\frac{a+b}{a-b}+u^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\cdot \operatorname{Arctg} u\cdot\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\cdot \operatorname{Arctg}\left(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x\cdot\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\right)$$

Ist aber zweitens: $a < b$, dann hat man aus (1)

$$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{2}{b-a}\int \frac{d\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}{\frac{b+a}{b-a}-\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}x} = \frac{2}{b-a}\int \frac{du}{\frac{b+a}{b-a}-u^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\cdot l\left(\frac{\sqrt{b+a}+u\sqrt{b-a}}{\sqrt{b+a}-u\sqrt{b-a}}\right)$$

$$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\cdot l\left(\frac{\sqrt{b+a}+\operatorname{tg}\frac{1}{2}x\cdot\sqrt{b-a}}{\sqrt{b+a}-\operatorname{tg}\frac{1}{2}x\cdot\sqrt{b-a}}\right)$$

Ist endlich drittens: $a = b$, so hat man:

$$\int \frac{dx}{a(1+\cos x)} = \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{\cos^2\frac{1}{2}x} = \frac{1}{a}\cdot\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x$$

Zehntes Buch.

Eigenschaften bestimmter Integrale.

149.

Es ist bereits erklärt, was man unter bestimmtem Integral versteht und wie dasselbe aus dem unbestimmten oder allgemeinen Integrale gefunden wird (§§ 30, 31). Ist nämlich:

$$\int f(x)dx = \mathrm{F}(x) + \mathrm{C}, \text{ so ist:}$$

$$\int_{x_0}^{x} f(x)dx = \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(x_0),$$

wobei jedoch die nothwendigen Bedingungen zu berücksichtigen sind, dass: 1) $f(x)$ nicht vieldeutig ist und sowohl für die Grenzen selbst, als auch innerhalb des ganzen Intervalls $x - x_0$ stets continuirlich sein muss, also weder imaginair noch unendlich wird, und 2) dass $f(x)$ innerhalb des Intervalls immer dasselbe Vorzeichen hat (§ 42).

Der Anfänger wird wohl thun, x als Abscisse, $f(x)$ als Ordinate und das bestimmte Integral als Summe unendlich schmaler Rechtecke zu denken.

150.

Hat $f(x)$ in gleichen Entfernungen (links und rechts) von der Mitte des Intervalls gleiche Werthe, so braucht man nur das In-

tegral von der Mitte bis zu Ende oder von Anfang bis zur Mitte des Intervalls doppelt zu nehmen. Man hat z. B. aus:

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} \cos x\,dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos x\,dx = 2$$

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2 x\,dx.$$

Sind aber die erwähnten von der Mitte gleichweit entfernten Werthe von entgegengesetzten Vorzeichen, so besteht das Integral aus zwei gleichen entgegengesetzten Summen und ist also nicht in geometrischem, sondern in rein arithmetischem Sinne genommen $= 0$, z. B.:

$$\int_0^{\pi} \cos x\,dx = 0.$$

150a.

Die bestimmten Integrale führen oftmals auf unerwartete sehr merkwürdige Resultate. Ein paar Beispiele mögen genügen dies zu zeigen, indem wir wegen weiterer Verfolgung dieses unerschöpflichen Gegenstandes auf grössere Werke der Integralrechnung, z. B. Cauchy's, oder auf Minding's Sammlung von Integraltafeln verweisen.

151.

Aufgabe. Man suche den Werth des folgenden bestimmten Integrals:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

Auflösung. Zufolge § 135 Formel I. hat man (n als ganze Zahl genommen):

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}$$

der vom Integralzeichen befreite Theil wird für jede der beiden angegebenen Grenzen $= 0$. Wir können ihn also weglassen und haben dann succesive:

$$\int_0^x \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{2n-3}{2n-2}\int_0^x \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}$$

$$\int_0^x \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}} = \frac{2n-5}{2n-4}\int_0^x \frac{dx}{(1+x^2)^{n-2}}$$

$$\vdots$$

$$\int_0^x \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Multipliciren wir diese Gleichungen mit einander und lassen dann beiderseits die sich hebenden Factoren weg, so ist:

$$\int_0^x \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n-2)}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

151a.

Aufgabe. Man suche den Werth des Integrals:

$$\int_0^x e^{-x} x^n\, dx.$$

Auflösung. Man hat hier zuerst:

$$\int x^n \cdot e^{-x} dx = -x^n \cdot e^{-x} + n\int e^{-x}\cdot x^{n-1} dx$$

hieraus folgt für die angegebenen Grenzen (D.-R. § 65) successive:

$$\int_0^x e^{-x} x^n\, dx = n\int_0^x e^{-x} x^{n-1}\, dx$$

$$\int_0^x e^{-x} x^{n-1} dx = (n-1)\int_0^x e^{-x} x^{n-2} dx$$

$$\vdots$$

$$\int_0^x e^{-x} x\, dx = 1\cdot\int_0^x e^{-x} dx$$

$$\int_0^x e^{-x}\, dx = 1$$

folglich durch Multiplication etc.:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^n dx = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)n \cdot$$

152.

Aufgabe. Man suche sowohl für ein gerades als auch ungerades n den Werth des Integrals:

$$\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Auflösung. Zufolge § 142 hat man für:

1) n gerade

$$\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots\cdots (n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots\cdots\cdots\cdots n} \cdot \frac{\pi}{2}$$

2) n ungerade

$$\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots\cdots (n-1)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots\cdots\cdots\cdots n}$$

Anmerkung. Weil in beiden Integralen für die äusserste obere Grenze $\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}$, unstetig wird, so scheint hier ein Verstoss gegen die § 149 erwähnte Bedingung gemacht zu sein. Die Richtigkeit des Integrals ergiebt sich aber, wenn man dasselbe als eine asymptotische Fläche betrachtet, wie in § 37.

152a.

Weil die Potenzen von echten Brüchen desto kleiner werden, je grösser der Exponent ist, so ist für alle Werthe von x zwischen 0 und 1 von folgenden drei Functionen:

$$\frac{x^{n-1}}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1-x^2}}$$

die erste grösser, die letzte kleiner als die mittlere. Dasselbe gilt offenbar auch, indem man ein Integral als Summe betrachtet, von den drei Integralen:

$$\int_0^1 \frac{x^{n-1} dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \int_0^1 \frac{x^{n+1} dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Sei nun n eine gerade, mithin $n-1$ und auch $n+1$ eine ungerade Zahl, so ist nach vorhergehendem Paragraph:

$$\int_0^1 \frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot\cdots\cdot(n-4)(n-2)}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot\cdots\cdot(n-3)(n-1)}$$

$$\int_0^1 \frac{x^{n}\cdot dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots\cdot(n-3)(n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot\cdots\cdot\cdots\cdot(n-2)\cdot n}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^1 \frac{x^{n+1}dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot\cdots\cdot(n-2)}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot\cdots\cdot(n-1)}\cdot\frac{n}{n+1}$$

Das letzte Integral weicht vom erstern nur in dem Factor $\frac{n}{n+1}$ ab. Für ein sehr grosses n werden beide Integrale näherungsweise und für $n=\infty$ vollkommen gleich, weil dann der Bruch $\frac{n}{n+1}=\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=\frac{1}{1+\frac{1}{\infty}}=1$ wird. Das zwischen beiden liegende mittlere Integral wird also für $n=\infty$ jedem gleich. Dies giebt uns nun den bereits von Wallis gefundenen merkwürdigen Ausdruck für die Zahl π. Es ist nämlich, wenn man die Factorreihen bis in's Unendliche fortlaufen lässt:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\cdot\cdots}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\cdot\cdots}$$

153.

Von practischer Wichtigkeit, namentlich für die Wahrscheinlichkeitsrechnung, ist die Bestimmung des Integrals:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

Dieses Integral lässt sich auf verschiedene Weise finden. Wir wählen hier Cauchy's Verfahren, welches Encke im Berliner astronomischen Jahrbuch für 1834 mittheilt.

Cauchy betrachtet daselbst zuerst das doppelte Integral:

$$V=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy,$$

welches in geometrischem Sinne das Volumen eines Körpers bedeutet, für dessen Oberfläche:

$$z=e^{-(x^2+y^2)}=e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

die Gleichung ist, und wo also x, y ganz unabhängig veränderliche Grössen sind, die sich beide von 0 bis $\pm\infty$ erstrecken, mithin dieselben Integrationsgrenzen haben.

Integrirt man erst in Bezug auf y und setzt einstweilen den Werth des unbekannten Integrals:

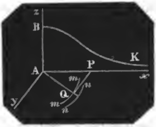
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy = L$$

so ist offenbar:

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy = L \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

mithin, wenn man jetzt nach x integrirt:

$$V = L^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ldots (2)$$



Denkt man sich in der Gleichung (1) $y = 0$ und dann für x alle möglichen Werthe von $x = 0$ bis $x = \pm\infty$ gesetzt, so erhält man einen durch die Achsen der x und z gelegten Durchschnitt, (eine asymptotische Fläche, wovon nur die eine Hälfte ABK dargestellt ist).

Es ist nun leicht einzusehen, dass alle Durchschnitte durch die Achse der z einander vollkommen gleich sind; denn die Entfernung eines Punctes Q in der Ebene der x, y ist $= \sqrt{x^2 + y^2}$. Alle Puncte in der Ebene der x, y, die gleichweit, um $AQ = r$, vom Anfangspunct A entfernt sind, mithin in einem Kreise mm liegen, für welche also $x^2 + y^2 = r^2$ ist, haben offenbar einerlei z, nämlich: $z = e^{-r^2} = MQ$; folglich sind alle erwähnten Durchschnitte gleich und man kann sich den Körper durch Umdrehung der asymptotischen Fläche ABK, um die Achse der z entstanden denken. Denkt man sich die mit den Radien r und $r + dr$ in der Ebene der x, y beschriebenen Bogen mm, nn zu ganzen Kreisen ergänzt und in denselben Cylinderflächen, senkrecht auf die Ebene der x, y errichtet, so erhält man offenbar eine unendlich dünne sogenannte Cylinderschale, deren innerer Radius $= r$, deren Dicke $= dr$ und deren Höhe $z = e^{-r^2}$. Es ist demnach das Differential des Körpers:

$$dV = 2r\pi \cdot e^{-r^2}\, dr.$$

Das Integral muss nun, um den ganzen in solchen unendlich dünnen Cylinderschalen (Elementen) zerlegt gedachten Körper zu erhalten, offenbar von $r = 0$ bis $r = \infty$ genommen werden, daher weil allgemein:

$$\int e^{-r^2}\, r\, dr = -\tfrac{1}{2} e^{-r^2} + C$$

$$V = 2\pi \int_0^\infty e^{-r^2}\, r\, dr = \pi.$$

Mithin ist vermöge Gleichung (2) $L^2 = \pi$, also $L = \sqrt{\pi}$, daher:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Elftes Buch.

Integration durch Differentiation unter dem Integralzeichen.

154.

Eine sehr weit greifende Methode unzählige, sowohl bestimmte als unbestimmte Integrale zu finden, geht aus dem schon von Leibnitz aufgestellten Satze hervor, dass es einerlei ist: ob man von einem zu integrirenden Differential $f(x, a)\,dx$, in Bezug auf eine darin vorkommende unabhängige constante Grösse (Parameter) a zuvor die Derivirte nimmt und dann integrirt, oder ob man erst integrirt und dann in Bezug auf jene Constante die Derivirte nimmt.

Um zuerst den Sinn dieses Satzes richtig aufzufassen, möge ein Erläuterungsbeispiel voraufgehen. Es ist z. B.:

$$\int (3ax^2 + a^3 b)\,dx = ax^3 + a^3 bx + C\cdot$$

differentiiren wir die Function unter dem Integralzeichen in Bezug auf a und dividiren durch da (indem man x als constant betrachtet) so ist:

$$\int \frac{d\cdot(3ax^2 + a^3 b)dx}{da} = \int (3x^2 + 3a^2 b)\,dx = x^3 + 3a^2 bx + C'$$

Differentiiren wir dagegen das zuvor gefundene Integral, so ist:

$$\frac{d\cdot(ax^3 + a^3 bx + C)}{da} = x^3 + 3a^2 bx$$

also ganz dasselbe wie vorhin, wenn man daselbst die willkürliche Constante $C' = 0$ setzt, oder auch dem letztern Resultat dieselbe willkürliche Constante C' hinzufügt.

Um nun die allgemeine Richtigkeit dieses Satzes einzusehen, braucht man in: $\int f(x, \alpha) dx$ nur $\alpha + \Delta\alpha$ statt α zu setzen, so ist, wenn man die Aenderung des Integrals mit $\Delta_\alpha \int f(x, \alpha)\, dx$ bezeichnet:

$$\Delta_\alpha \int f(x, \alpha)\, dx = \int f(x, \alpha + \Delta\alpha) dx - \int f(x, \alpha)\, dx$$

$$\Delta_\alpha \int f(x, \alpha)\, dx = \int [f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)] dx$$

und wenn man jetzt $f(x, \alpha + \Delta\alpha)$ entwickelt (D.-R. § 141):

$$\Delta_\alpha \int f(x, \alpha)\, dx = \int [f(x, \alpha) + f'_\alpha(x, \alpha)\Delta\alpha + \cdots - f(x, \alpha)] dx$$

$$\Delta_\alpha \int f(x, \alpha)\, dx = \int \left[f'_\alpha(x, \alpha)\, \Delta\alpha + f''_\alpha(x, \alpha) \frac{\Delta\alpha^2}{1 \cdot 2} + \cdots \right] dx$$

$$\Delta_\alpha \int \frac{f(x, \alpha) \cdot dx}{\Delta\alpha} = \int \left[f'(x, \alpha) + f''_\alpha(x, \alpha) \frac{\Delta\alpha}{1 \cdot 2} + \cdots \right] dx$$

Geht man jetzt auf die Grenze über, so ist für $\Delta\alpha = 0$:

$$\frac{d \cdot (\int f(x, \alpha) dx)}{d\alpha} = \int \frac{d \cdot (f(x, \alpha)\, dx)}{d\alpha}$$

155.

Dasselbe Verfahren kann man offenbar, wenn die Constante α nicht verschwindet, beliebig oft wiederholen und dann aus einem gefundenen Integral so viele neue ableiten, als man nur will, und welche man auf directe Weise schwerlich gefunden haben würde.

Da nun die durch Differentiation unter dem Integralzeichen gefundenen allgemeinen Integrale (indem man jedes Mal eine willkürliche Constante c hinzufügt), für jeden Werth von x und α, für welche selbstverständlich $f(x, \alpha)$ stetig ist, gültig sind, so ist auch:

$$\frac{d \cdot \left(\int_{x_0}^{x_1} f(x, \alpha)\, dx \right)}{d\alpha} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{d \cdot (f(x, \alpha) dx)}{d\alpha}$$

156.

Beispiel 1. Wir haben z. B.:

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \cdot \text{Arc tg} \left(= \frac{x}{a} \right) + C \cdots \cdots (1)$$

und durch Differentiation in Bezug auf a:

$$\int\frac{-2a\,dx}{(a^2+x^2)^2}=-\text{Arc tg}\,\frac{x}{a}\cdot\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a}\cdot\frac{x}{a^2+x^2}$$

$$\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^2}=\frac{x}{2a^2(a^2+x^2)}+\frac{1}{2a^3}\cdot\text{Arc tg}\,\frac{x}{a}+C\cdot\cdot(2)$$

Ferner hat man aus (1):

$$\int_0^x\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\cdot\frac{\pi}{2}$$

und wenn man in Bezug auf a differentiirt:

$$\int_0^x\frac{-2a\,dx}{(a^2+x^2)^2}=-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^x\frac{dx}{(a^2+x^2)^2}=\frac{\pi}{4a^2}$$

Dies letztere bestimmte Integral erhält man also direct aus (1), ohne erst das allgemeine Integral (2) entwickeln zu brauchen.

156a.

Beispiel 2. Durch wiederholtes Differentiiren (welches wir rechter Hand nur andeuten) erhält man aus:

$$\int\frac{dx}{a+x^2}=\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\text{Arc tg}\,\frac{x}{\sqrt{a}}+C$$

$$\int\frac{-1\cdot dx}{(a+x^2)^2}=d\cdot\frac{\left(a^{-\frac{1}{2}}\cdot\text{Arc tg}\,\frac{x}{\sqrt{a}}\right)}{da}+C$$

$$\int\frac{1\cdot 2\,dx}{(a+x^2)^3}=\frac{d^2\cdot\left(a^{-\frac{1}{2}}\cdot\text{Arc tg}\,\frac{x}{\sqrt{a}}\right)}{da^2}+C$$

$$\vdots$$

$$\int\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n\,dx}{(a+x^2)^{n+1}}=\frac{d^n\left(a^{-\frac{1}{2}}\,\text{Arc tg}\,\frac{x}{\sqrt{a}}\right)}{da^n}+C$$

$$\int_0^x\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n\,dx}{(a+x^2)^{n+1}}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{d^n\cdot(a^{-\frac{1}{2}})}{da^n}=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n a^n\sqrt{a}}\,\frac{\pi}{2}$$

und wenn man jetzt $a = 1$ setzt:

$$\int_0^x \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdots \cdot 2n} \cdot \frac{\pi}{2}$$

157.

Beispiel 3. Durch wiederholtes Differentiiren der beiden Integrale:

$$\int e^{\pm ax} dx; \quad \int_0^x e^{-ax} dx$$

in Bezug auf a erhält man: (Cauchy T. II. pag. 76)

$$\int x^n e^{\pm ax} dx = \pm \frac{d^n \cdot (a^{-1} e^{\pm ax})}{da^n} + C$$

$$\int_0^x x^n e^{-ax} dx = \frac{d^n \cdot (a^{-1})}{da^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{a^{n+1}}$$

158.

Eine andere Methode, bestimmte Integrale zu finden, besteht in der sogenannten Integration unter dem Integralzeichen in Bezug auf eine als veränderlich betrachtete Constanten (Parameter) und beruht auf dem Satze, dass bei Bestimmung eines Doppelintegrals:

$$\int_{y_0}^{y} \int_{x_0}^{x} f(x, y)\, dx\, dy$$

die Ordnung der beiden Integrationen beliebig ist, d. h. wenn x, y von einander unabhängig sind und $f(x, y)$ innerhalb der angegebenen Grenzen stetig ist und kein Zeichenwechsel Statt findet, so ist es einerlei, ob man erst in Bezug auf y und dann in Bezug auf x oder umgekehrt erst in Bezug auf x und dann in Bezug auf y integrirt. Dieser Satz folgt schon auf anschauliche Weise aus § 65, lässt sich aber auch folgendermassen beweisen. Es ist erstlich (§ 154):

$$\frac{d \cdot \left(\int_{x_0}^{x} F(x,\alpha) dx\right)}{d\alpha} = \int_{x_0}^{x} \frac{d \cdot (F(x, \alpha) dx)}{d\alpha} \cdots\cdots (1)$$

Man setze: $F(x, \alpha) = \int_{\alpha_0}^{\alpha} f(x, \alpha) \cdot d\alpha$

$$\text{mithin: } F(x, \alpha)dx = \int_{\alpha_0}^{\alpha} f(x, \alpha)\, d\alpha \cdot dx \cdots\cdots (2)$$

$$\frac{d \cdot (F(x, \alpha)dx)}{d\alpha} = f(x, \alpha)\, dx \cdots\cdots\cdots (3)$$

Die in (2) und (3) erhaltenen Ausdrücke in (1) substituirt, ist:

$$\frac{d \cdot \int_{x_0}^{x} \int_{\alpha}^{\alpha} f(x, \alpha)\, d\alpha\, dx}{d\alpha} = \int_{x_0}^{x} f(x, \alpha) dx$$

$$d \cdot \int_{x_0}^{x} \int_{\alpha_0}^{\alpha} f(x, \alpha)\, d\alpha\, dx = \int_{x^0}^{x} f(x, \alpha)\, dx\, d\alpha.$$

Das Zeichen d bezieht sich auf α. Integrirt man also in Bezug auf α, so ist, weil die Zeichen $\int$ und d sich heben, wie behauptet:

$$\int_{x_0}^{x} \int_{\alpha_0}^{\alpha} f(x, \alpha)\, d\alpha\, dx = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \int_{x_0}^{x} f(x, \alpha) dx\, d\alpha$$

159.

Vorstehender Satz, über die willkürliche Aufeinanderfolge der Integrationen, lässt sich offenbar auf dieselbe Weise auf vielfache Integrale ausdehnen.

Um nun zu zeigen, wie man durch Anwendung desselben, bestimmte Integrale finden kann, zu welchen die entsprechenden allgemeinen Integrale nicht zu finden sind, nehmen wir folgendes Beispiel.

Sei m eine positive Zahl, so folgt aus:

$$\int x^{m-1} dx = \frac{x^m}{m} + C$$

$$\int_0^1 x^{m-1} dx = \frac{1}{m}$$

Multipliciren wir mit dm, so ist:

$$\int_0^1 x^{m-1}\, dx\, dm = \frac{dm}{m}$$

$$\text{mithin: } \int_{m_0}^{m} \int_0^1 x^{m-1}\, dx\, dm = \int_{m_0}^{m} \frac{dm}{m}$$

oder: $\int_0^1\int_{m_0}^{m} x^{m-1} dx\, dm = \int_{m_0}^{m} \frac{dm}{m} \cdots\cdots (1)$

Integriren wir also erst in Bezug auf m, indem wir x als constant behandeln, so ist (§ 3, 3):

$$\int x^{m-1} dm = \frac{x^{m-1}}{lx} + C$$

mithin: $\int_{m_0}^{m} x^{m-1} dm = \frac{x^{m-1} - x^{m_0-1}}{lx}$

Wird dies in Bezug auf m gefundene Integral linker Hand in (1) substituirt, so ist:

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1} - x^{m_0-1}}{lx} \cdot dx = l\left(\frac{m}{m_0}\right)$$

$$\int_0^1 \frac{x^m - x^{m_0}}{lx} \cdot \frac{dx}{x} = l\left(\frac{m}{m_0}\right)$$

160.

Aufgabe. Man suche, was aus dem Integral

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} dx$$

wird, indem man es mit da multiplicirt und dann von $a = a_0$ bis a integrirt (a, a_0 als positiv vorausgesetzt).

Auflösung. Man hat hier:

$$\int e^{-ax} dx = -\frac{1}{a} \cdot e^{-ax} + C$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} dx = \frac{1}{a}$$

$$\int_0^{\infty} dx \int_{a_0}^{a} e^{-ax} da = \int_{a_0}^{a} \frac{da}{a} = l\left(\frac{a}{a_0}\right)$$

Nun ist: $\int e^{-ax} da = -\frac{1}{x} \cdot e^{-ax} + C$

$$\int_{a_0}^{a} e^{-ax} da = \frac{e^{-a_0 x} - e^{-ax}}{x}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-a_0 x} - e^{-ax}}{x} \cdot dx = l\left(\frac{a}{a_0}\right)$$

161.

Von den übrigen verschiedenen Methoden bestimmte Integrale zu finden, erwähnen wir schliesslich noch folgende von Laplace und die darin besteht, das gesuchte Integral durch Differentiation in Bezug auf eine Constante, erst auf ein anderes leichter zu findendes Integral zu bringen, aus welchem sich das eigentlich gesuchte ableiten lässt. Man habe z. B. das Integral

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2} \cos bx\, dx$$

zu bestimmen. Setzt man dasselbe $= u$ und differentiirt in Bezug auf b, so ist (§ 154):

$$\frac{du}{db} = -\int_0^\infty e^{-a^2x^2} \cdot x \sin bx\, dx$$

Durch theilweise Integration hat man nun:

$$\int e^{-a^2x^2} x \cdot \sin bx\, dx = -\frac{1}{2a^2} \cdot e^{-a^2x^2} \cdot \sin bx + \frac{b}{2a^2} \int e^{-a^2x^2} \cos bx\, dx$$

Der vom Integralzeichen befreite Theil verschwindet für $x = 0$ und für $x = \infty$, daher:

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2} x \sin bx\, dx = \frac{b}{2a^2} \int_0^\infty e^{-a^2x^2} \cos bx\, dx$$

folglich auch, weil das Integral rechter Hand $= u$ gesetzt worden und wie oben gefunden, das Integral linker Hand $= -\frac{du}{db}$ ist:

$$\frac{du}{db} = -\frac{b}{2a^2} \cdot u$$

$$\frac{du}{u} = -\frac{b \cdot db}{2a^2}$$

$$lu = -\frac{b^2}{4a^2} + lC$$

$$l\left(\frac{u}{C}\right) = -\frac{b^2}{4a^2}$$

$$u = C \cdot e^{-\frac{b^2}{4a^2}}$$

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2} \cos bx\, dx = C \cdot e^{-\frac{b^2}{4a^2}}$$

Geben wir der willkürlichen Constante den Werth, welchen das gesuchte Integral für $b = 0$ erhält, nämlich:

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \quad (\S\ 153),$$

so hat man:

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} \cos bx\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \cdot e^{-\frac{b^2}{4a^2}}$$

Anmerkung. Mehreres über bestimmte Integrale, so wie auch die sogenannten Gamma- und Beta-Functionen und anderer Euler'schen Integrale findet der sich hierfür Interessirende in Cauchy's grösserem Werke.

Zwölftes Buch.

Euler's Summationsformel.

162.

So wie die Differentialrechnung angewandt werden kann, auf indirecte Weise Reihen zu summiren, indem man von einem bekannten Fall ausgeht, so lässt sich auf ähnliche Weise auch die Integralrechnung zur Summation der Reihen benutzen, indem man statt auf beiden Seiten die Derivirten zu nehmen (D.-R. § 37), auf beiden Seiten mit dx, oder auch mit $\varphi(x)dx$, multiplicirt und dann integrirt.

Man hat z. B. (Analysis § 77).

$$-l(1-x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots$$

Multiplicirt man beiderseits mit dx und integrirt, so kömmt:*)

$$x+(1-x)\,l(1-x)=\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^4}{3\cdot 4}+\frac{x^5}{4\cdot 5}+\cdots \quad (1)$$

*) Setzt man $1-x=u$, also $dx=-du$, so hat man:

$$-\int l(1-x)\,dx=\int lu\cdot du=lu\cdot u-u$$

$$-\int l(1-x)\,dx=(1-x)\,l(1-x)-1+x+c$$

Weil für $x=0$ die Summe der Reihe $=0$ ist, so muss auch das Integral für $x=0$ verschwinden, folglich die Constante $c=1$ sein.

Setzt man $x = 1$, so ist (D.-R. § 66):

$$1 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \cdots \text{ in inf.}$$

Multiplicirt man die Gleichung (1) beiderseits wieder mit dx und integrirt, so kömmt:

$$\tfrac{3}{4}x^2 - \tfrac{1}{2}x - \frac{(1-x)^2}{2} l(1-x) = \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{x^5}{3\cdot 4\cdot 5} + \cdots\cdots$$

Setzt man $x = 1$, so ist (D.-R. § 66):

$$\tfrac{1}{4} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \cdots \text{ in inf.}$$

Setzt man $x = \frac{1}{2}$, so ist (weil $-\frac{1}{8} l(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8} l2$):

$$\tfrac{1}{8} l2 - \tfrac{1}{16} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2^3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 2^4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 2^5} + \cdots\cdots \text{ in inf.}$$

Wir erwähnen jedoch diese indirecte Methode (deren es noch mehrere giebt, nur beiläufig, indem wir, in Betreff der Summation der Reihen, hier nur ein directes Verfahren, nämlich die nach Euler benannte Summationsformel mittheilen wollen, weil sie vielen Fällen nützlich ist. Eine allgemeine Methode, alle Reihen zu summiren, giebt es nicht.

163.

In der Voraussetzung, dass die Function $\varphi(x)$ sowohl, als auch ihre sämmtlichen Derivirten stetig sind, sei $\varphi(x)$ das allgemeine Glied einer Reihe, die entsteht, indem man $x = x_0$, $x_0 + h$, $x_0 + 2h, \cdots x_0 + nh$ setzt. Die Summe dieser Reihe wollen wir mit $\sum_{x_0}^{x_0+nh} \varphi(x)$ bezeichnen, so dass:

$$\sum_{x_0}^{x_0+nh} \varphi(x) = \varphi(x_0) + \varphi(x_0 + h) + \varphi(x_0 + 2h) + \cdots + \varphi(x_0 + nh) \cdots (1)$$

Euler lässt nun die Summe von den Derivirten $\varphi'(x)$, $\varphi''(x) \cdots$ und von dem Integrale $\int \varphi(x)\,dx$ abhängen, zu welchem Resultat man folgendermaassen gelangen kann.

Zufolge § 80 (3) ist:

$$\left.\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_0+h}\varphi(x)dx &= \varphi(x_0)\cdot h+\varphi'(x_0)\cdot\frac{h^2}{1\cdot 2}+\varphi''(x^0)\cdot\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots\cdots\\
\int_{x_0+h}^{x_0+2h}\varphi(x)\,dx &= \varphi(x_0+h)\cdot h+\varphi'(x_0+h)\cdot\frac{h^2}{1\cdot 2}+\varphi''(x_0+h)\cdot\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots\\
&\vdots\\
\int_{x_0+nh}^{x_0+nh+h}\varphi(x)dx &= \varphi(x_0+nh)h+\varphi'(x_0+nh)\cdot\frac{h^2}{1\cdot 2}+\varphi''(x_0+nh)\cdot\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots
\end{aligned}\right\}\cdot(2)$$

Addiren wir diese Gleichungen (2) und bemerken, dass:

$$\int_{x_0}^{x_0+h}\varphi(x)dx+\int_{x_0+h}^{x_0+2h}\varphi(x)dx+\cdots+\int_{x_0+nh}^{x_0+nh+h}\varphi(x)dx=\int_{x_0}^{x_0+nh+h}\varphi(x)\,dx$$

$$\varphi'(x_0)+\varphi'(x_0+h)+\varphi'(x_0+2h)+\cdots\cdots+\varphi'(x_0+nh)=\sum_{x_0}^{x_0+nh}\varphi'(x)$$

etc. etc.

so ist, indem wir, des bequemern Schreibens halber, die Grenzen nicht andeuten, jedoch im Sinne behalten:

$$\int\varphi(x)dx=h\,\Sigma\,\varphi(x)+\frac{h^2}{1\cdot 2}\cdot\Sigma\,\varphi'(x)+\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\Sigma\,\varphi''(x)+\cdots(3)$$

wo nun rechter Hand jede Summe von dem beliebigen Ausgangswerth von $x=x_0$ bis zu dem beliebigen Endwerth von $x=x_0+nh$, linker Hand das Integral aber von x_0 bis x_0+nh+h zu nehmen ist.

Weil die Gleichung (3) allgemein für jede Function von x gültig ist, so kann man statt $\varphi(x)$ auch ihre Derivirten $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)\cdots$ setzen und hat dann gleicherweise:

$$\begin{aligned}
\int\varphi'(x)dx &= h\cdot\Sigma\,\varphi'(x)+\frac{h^2}{1\cdot 2}\cdot\Sigma\,\varphi''(x)+\cdots\\
\int\varphi''(x)dx &= h\cdot\Sigma\,\varphi''(x)+\frac{h^2}{1\cdot 2}\cdot\Sigma\,\varphi'''(x)+\cdots\\
\int\varphi'''(x)dx &= h\cdot\Sigma\varphi'''(x)+\frac{h^2}{1\cdot 2}\cdot\Sigma\,\varphi^{IV}(x)+\cdots\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit αh, die zweite mit $\alpha' h^2$, die dritte mit $\alpha'' h^3$, $\cdots$ und addirt sie alle zur vorhergehenden Gleichung (3), so lassen sich die Coefficienten α, α', α'', $\cdots$ so bestimmen, dass die Summen $\Sigma\varphi'(x)$, $\Sigma\varphi''(x)\cdots$ alle eliminirt werden. Damit nämlich bei der Addition der Gleichungen:

$$\int\varphi(x)dx = h\cdot\Sigma\varphi(x) + \frac{h^2}{1\cdot 2}\cdot\Sigma\varphi'(x) + \frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\Sigma\varphi''(x) + \frac{h^4}{1.2.3.4}\cdot\Sigma\varphi'''(x) + \cdots$$

$$\alpha h\int\varphi'(x)dx = \cdots + \alpha h^2\cdot\Sigma\varphi'(x) + \frac{\alpha h^3}{1\cdot 2}\cdot\Sigma\varphi''(x) + \frac{\alpha h^4}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\Sigma\varphi'''(x) + \cdots$$

$$\alpha' h^2\int\varphi''(x)dx = \cdots\cdots\cdots + \alpha' h^3\cdot\Sigma\varphi''(x) + \frac{\alpha' h^4}{1\cdot 2}\cdot\Sigma\varphi'''(x) + \cdots$$

$$\vdots$$

die Functionen $\Sigma\varphi'(x)$, $\Sigma\varphi''(x)$, $\cdots$ herausfallen, müssen die fraglichen Coefficienten α, α', α'', $\alpha'''\cdots$ so bestimmt werden, dass sie folgenden, nach einer in die Augen springenden Recursionsregel zu bildenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha + \frac{1}{1\cdot 2} = 0\\
&\alpha' + \frac{\alpha}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} = 0\\
&\alpha'' + \frac{\alpha'}{1\cdot 2} + \frac{\alpha}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 0\\
&\alpha''' + \frac{\alpha''}{1\cdot 2} + \frac{\alpha'}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{\alpha}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 0\\
&\vdots
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(4)$$

Genüge leisten, was, wie man sieht, möglich ist. Die erwähnte Addition giebt dann für die gesuchte Summe die Gleichung:

$$\Sigma\varphi(x) = \frac{1}{h}\int\varphi(x)\,dx + \alpha\int\varphi'(x)\,dx + \alpha' h\int\varphi''(x)\,dx + \cdots (5)$$

164.

Eine allgemeine Formel aufzustellen, nach welcher man jeden der immer kleiner werdenden Coefficienten α, α', $\alpha''\cdots$ direct

berechnen könnte, würde auf grosse Weitläufigkeiten führen.*) Es genügt aber, nur die zwei, drei ersten zu bestimmen, und diese erhält man leicht aus den Gleichungen (4), nämlich: $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\alpha' = \frac{1}{12}$, $\alpha'' = 0$, $\alpha''' = -\frac{1}{720}$, $\alpha^{IV} = 0$, $\alpha^{V} = \frac{1}{30240}$.

Substituiren wir diese Werthe in (5) und beachten zugleich, dass offenbar $\int \varphi'(x)dx = \varphi(x)$, $\int \varphi''(x)\,dx = \varphi'(x)$, so ist die allgemeine Summationsformel:

$$\Sigma\varphi(x) = \frac{1}{h}\int \varphi(x)dx - \tfrac{1}{2}\varphi(x) + \frac{h}{12}\cdot\varphi'(x) - \frac{h^3}{720}\varphi'''(x) + \frac{h^5}{30240}\varphi^{V}(x) - \cdots$$

165.

Bei der Anwendung vorstehender Summationsformel ist jedoch nicht zu vergessen, dass wenn linker Hand die Summe $\Sigma\varphi(x)$ von dem beliebigen Ausgangswerth $\varphi(x_0)$ bis zu $\varphi(x_0+nh)$ genommen werden soll, sämmtliche Integrale rechter Hand, nämlich auch die vom Integralzeichen befreiten Integrale $\varphi(x) = \int \varphi'(x)dx$; $\varphi'(x) = \int \varphi''(x)dx, \cdots\cdots$ alle innerhalb der Grenzen von x_0 bis $x_0 + nh + h$ genommen werden müssen. Will man auch noch diesen kleinen Uebelstand beseitigen und die oberen Grenzen auf beiden Seiten gleich haben (die unteren sind es ja), so kann man dies folgendermaassen bewirken. Es ist:

$$\int_{x_0}^{x_0+nh+h} \varphi(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_0+nh} \varphi(x)dx + \int_{x_0+nh}^{x_0+nh+h} \varphi(x)dx$$

oder, das zweite Integral rechter Hand in eine Reihe entwickelt (§ 80, 3):

$$\int_{x_0}^{x_0+nh+h} \varphi(x)dx = \int_{x_0}^{x_0+nh} \varphi(x)dx + h\cdot\varphi(x) + \frac{h^2}{1\cdot2}\varphi'(x) + \frac{h^3}{1\cdot2\cdot3}\cdot\varphi''(x) + \cdots\cdots$$

$$\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+nh+h} \varphi(x)dx = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+nh} \varphi(x)dx + \varphi(x) + \frac{h}{1\cdot2}\varphi'(x) + \frac{h^2}{1\cdot2\cdot3}\varphi''(x) + \cdots\cdots$$

*) Man sehe hierüber Klügel's math. Wörterbuch 4. Theil, oder Lacroix T. III. in 4°, woselbst auch gezeigt wird, dass alle Coefficienten mit geradem Index = 0 sind und dass sie alle sehr rasch abnehmen, was auch unmittelbar einzusehen ist.

wo nun rechter Hand in allen nach dem Integral folgenden Gliedern x_0+nh statt x gesetzt werden muss.

Da es ferner einerlei ist, ob man x_0+nh+h statt x in $\varphi(x)$, in $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)\cdots$ oder statt dessen, x_0+nh statt x, in $\varphi(x+h)$, in $\varphi'(x+h)$, $\varphi''(x+h)\cdots$ setzt, so kömmt, wenn man diese Ausdrücke statt $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)\cdots$, in die Summationsformel § 164 substituirt und zugleich $\varphi(x+h)$, $\varphi'(x+h)\cdots$ entwickelt, für die rechte Seite der Summationsformel (§ 164):

$$\frac{1}{h}\int \varphi(x)dx+\varphi(x)+\frac{h}{1\cdot 2}\varphi'(x)+\frac{h^2}{1\cdot 2\cdot 3}\varphi''(x)+\cdots\cdots$$

$$-\tfrac{1}{2}\varphi(x)-\frac{h}{2}\cdot\varphi'(x)-\frac{h^2}{1\cdot 4}\cdot\varphi''(x)-\cdots\cdots$$

$$\frac{h}{12}\cdot\varphi'(x)+\frac{h^2}{12}\cdot\varphi''(x)+\cdots\cdots$$

$$\vdots$$

oder gehörig reducirt, für die verlangte Summationsformel:

$$\Sigma\varphi(x)=\frac{1}{h}\int\varphi(x)dx+\tfrac{1}{2}\varphi(x)+\frac{h}{12}\cdot\varphi'(x)-\frac{h^3}{720}\cdot\varphi'''(x)+\frac{h^5}{30240}\cdot\varphi^{V}(x)-..$$

wo jedoch auf der rechten Seite noch eine Constante hinzugesetzt und dieselbe jedesmal so bestimmt werden muss, dass für $x=x_0$ die Summe $=\varphi(x_0)$ wird, weil, wenn man die rechte Seite innerhalb der Grenzen $\varphi(x_0)$ und $\varphi(x_0+nh)$ nimmt, das Glied $\varphi(x_0)$ von der Summe ausgeschlossen sein würde.

Es ist einleuchtend, dass wenn das allgemeine Glied einer zu summirenden Reihe, nämlich $\varphi(x)$ und folglich auch das Integral $\int\varphi(x)dx$ eine ganze Function von x ist, die Summe ganz genau gefunden wird, weil dann die Derivirten $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)\cdots$ zuletzt $=0$ werden und die Summationsreihe abbricht. In allen andern Fällen aber wird die Summationsreihe selbst eine unendliche und dann kann, indem man nur die ersten bedeutendsten Glieder nimmt, die Summe darnach nur näherungsweise gefunden werden, jedoch für die practischen Zwecke genügend, für welche sie hier aufgestellt worden.

In der Regel ist $h=1$ und dann ist:

$$\Sigma\varphi(x)=c+\int\varphi(x)dx+\tfrac{1}{2}\varphi(x)+\frac{\varphi'(x)}{12}-\frac{\varphi'''(x)}{720}+\frac{\varphi^{V}(x)}{30240}+\cdots\cdots$$

166.

Aufgabe. Man suche die Summe der n ersten Cubiczahlen, nämlich: $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$.

Auflösung. Hier ist x^3 das allgemeine Glied der zu summirenden Reihe und $h=1$, ferner:

$$\varphi(x)=x^3; \qquad \int\varphi(x)dx=\frac{x^4}{4}$$

$$\varphi'(x)=3x^2; \qquad \varphi''(x)=6x$$

$$\varphi'''(x)=6; \qquad \varphi^{IV}(x)=0$$

$$\Sigma\cdot x^3=\frac{x^4}{4}+\tfrac{1}{2}x^3+\tfrac{1}{4}x^2-\tfrac{1}{120}+c$$

Soll die Summe für $x=0$ Null, oder für $x=1$, $=1$ sein, so ist die Constante $c=\frac{1}{120}$.

167.

Aufgabe. Man suche die Summe der x ersten Stammbrüche:

$$\tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{x}$$

Auflösung. Hier ist das allgemeine Glied der Reihe: $\varphi(x)=\frac{1}{x}$, mithin: $\int\varphi(x)\,dx=lx$, $\varphi'(x)=-x^{-2}$ etc., folglich:

$$\Sigma\left(\frac{1}{x}\right)=c+lx+\frac{1}{2x}-\frac{1}{12x^2}+\frac{1}{120x^4}-\frac{1}{252x^6}+\cdots(1)$$

Die Summe der zehn ersten Glieder der zu summirenden Reihe lässt sich leicht bis auf acht Decimalen genau unmittelbar finden. Es ist nämlich:

$$\tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\cdots\cdots+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{10}=2{,}9289682539\cdot$$

Setzt man in (1) $x=10$, für welchen Werth von x die auf $\frac{1}{252x^6}$ folgenden Glieder auf die siebente Decimale keinen Einfluss mehr haben, so hat man zur Bestimmung der Constante c die Summe von zehn Gliedern, nämlich:

$$2{,}92896825=c+l10+\frac{1}{20}-\frac{1}{1200}+\frac{1}{120\cdot 10^4}$$

hieraus folgt (Analysis § 78): $c=0{,}57721566$, daher:

$$\Sigma\left(\frac{1}{x}\right)=0{,}57721566+lx+\frac{1}{2x}-\frac{1}{12x^2}+\frac{1}{120x^4}-+\cdots$$

Setzt man $x=1000$, so hat man bis auf acht Decimalen genau:

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\cdots+\tfrac{1}{1000}=7{,}48547086\cdot\cdot$$

168.

Aufgabe. Man suche die Summe der reciproken Quadrate der natürlichen Zahlen:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{x^2}$$

Auflösung. Man hat hier:

$$\Sigma\left(\frac{1}{x^2}\right)=c-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}+\frac{1}{30x^5}-\frac{1}{42x^7}+\cdots\cdots$$

Ferner findet man für $x=10$ durch unmittelbare Rechnung:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{10^2}=1{,}54976773\cdots$$

$$-\frac{1}{10}+\frac{1}{2\cdot10^2}-\frac{1}{6\cdot10^3}+\frac{1}{30\cdot10^5}=-0{,}09516633$$

$$1{,}54976773=c-0{,}09516633$$

$$c=1{,}64493406$$

$$\Sigma\left(\frac{1}{x^2}\right)=1{,}64493406-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{6x^3}+\frac{1}{30x^5}-+\cdots$$

Die Summe von tausend Gliedern ist also bis auf acht Decimalen genau $=1{,}64393406$ und die Summe der ganzen Reihe $(x=\infty)$ ist bis auf acht Decimalen genau $=1{,}64493406\cdots$

Auf dieselbe Weise werden die Summen aller übrigen reciproken Potenzen der natürlichen Zahlen gefunden. Legendre hat diese Summen bis zur 35sten Potenz und bis auf 15 Decimalen genau berechnet. (Siehe Klügels math. Wörterbuch 4. Th., woselbst das ausführliche Capitel über Summation der Reihen einen Raum von beinahe 300 Seiten einnimmt.)

169.

In der Wahrscheinlichkeitsrechnnng wird manchmal die Summe der Logarithmen mehrerer auf einander folgenden natürlichen Zahlen erforderlich:

$$\Sigma(lx)=l1+l2+l3+\cdots+lx$$

Hier ist nun $\varphi(x)=lx$, mithin:

$$\int\varphi(x)\,dx=\int lx\cdot dx=x\cdot lx-x$$

$$\varphi'(x)=\frac{1}{x},\quad \varphi''(x)=-x^{-2},\quad \varphi'''(x)=2x^{-3}$$

$$\varphi^{IV}(x) = -6x^{-4},\ \varphi^{V}(x) = 24x^{-5}$$

$$\Sigma(lx) = c + (x+\tfrac{1}{2}) \cdot lx - x + \frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \frac{1}{1260x^5} - + \cdots (1)$$

In Ermangelung von zehnzifferigen Logarithmen-Tafeln, mittelst welcher man die Summe der zehn ersten Logarithmen bis auf acht Decimalen leicht finden könnte, kann man die Constante c auch auf folgende Weise bestimmen.

Zufolge § 152a ist, wenn man dort den Zähler mit dem Factor $2x$ abbricht, für $x = \infty$:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdots\cdots (2x-2)(2x-2) \cdot 2x}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdots\cdots (2x-3)(2x-1)(2x-1)}$$

$$l\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 2[l2 + l4 + l6 + \cdots + l(2x-2)] + l2x \\ -2[l1 + l3 + l5 + \cdots + l(2x-1)] \end{cases} \cdots\cdots (2)$$

Für $x = \infty$ fallen in (1) alle auf $-x$ folgende Glieder weg und man hat also für $x = \infty$:

$$l1 + l2 + l3 + \cdots + lx = c + (x+\tfrac{1}{2})lx - x \cdots\cdots (3)$$

Setzt man hierin $2x$ statt x, so ist ebenso:

$$l1 + l2 + l3 + \cdots + l2x = c + (2x+\tfrac{1}{2})l2x - 2x \cdots\cdots (4)$$

Addirt man linker Hand in (3) zu jedem Gliede $l2$, mithin rechter Hand $xl2$, so ist:

$$l2 + l4 + l6 + \cdots + l2x = c + (x+\tfrac{1}{2})lx + xl2 - x \cdots (5)$$

Subtrahirt man beiderseits $l2x = lx + l2$, so ist:

$$l2 + l4 + l6 + \cdots + l(2x-2) = c + (x-\tfrac{1}{2})lx + (x-1)l2 - x$$

$$2[l2+l4+l6+\cdots+l(2x-2)] + l2x = 2c + 2xlx + (2x-1)l2 - 2x \cdots (6)$$

Subtrahirt man (5) von (4) und beachtet, dass:

$$(2x+\tfrac{1}{2})l2x = (2x+\tfrac{1}{2})(lx+l2), \text{ so ist:}$$

$$l1 + l3 + l5 + \cdots + l(2x-1) = xlx + (x+\tfrac{1}{2})l2 - x$$

$$2[l1 + l3 + l5 + \cdots + (2x-1)] = 2xlx + (2x+1)lx - 2x \cdots (7)$$

Substituirt man die in (6) und (7) gefundenen Ausdrücke, welche beide für $x = \infty$ gelten, in (2), so hat man zur Bestimmung der Constante c:

$$l\pi - l2 = 2c - 2l2$$
$$2c = l2 + l\pi = l2\pi$$
$$c = \tfrac{1}{2}l2\pi.$$

Substituirt man diesen für c gefundenen Werth in (1), so ist:

$$\Sigma(lx) = \tfrac{1}{2}l2\pi + (x+\tfrac{1}{2})lx - x + \frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + - \cdots$$

Verbesserungen.

Seite 10,	Zeile 13 v. u.,	statt § 6, 3,	lies: § 7, 3.
« 27,	« 13, 16 u. 18,	« x	« x_1
« 33,	« 2,	« $\sin\frac{x}{a}$	« $\text{Arc}\sin\frac{x}{a}$
« 76,	« 6 u. 7. v. u.,	« $f(x_0)$	« $f'(x_0)$

Von demselben Verfasser ist früher erschienen:

Ausführliches Lehrbuch der Arithmetik und Algebra.
Zum Selbstunterricht und mit Rücksicht auf die Zwecke des praktischen Lebens bearbeitet. 3te Auflage. Hamburg 1853. 1⅓ ℛ.

Ausführliches Lehrbuch der Elementar-Geometrie.
Ebene und körperliche Geometrie; zum Selbstunterricht, mit Rücksicht auf die Zwecke des praktischen Lebens. Mit 192 Figuren im Text. Zweite Auflage. Hamburg 1855. 1 ℛ.

Ausführliches Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie.
Zum Selbstunterricht, mit Rücksicht auf die Zwecke des praktischen Lebens. Mit 58 Figuren im Text. Hamburg 1852. cart. 21 Ngr.

Ausführliches Lehrbuch der höhern Geometrie.
Zum Selbstunterricht, mit Rücksicht auf das Nothwendigste und Wichtigste. Mit 122 Figuren im Text. Dritte verbesserte Auflage. Leipzig, 1855. 1⅓ ℛ.

Ausführliches Lehrbuch der Analysis.
Zum Selbstunterricht und mit Rücksicht auf die Zwecke des praktischen Lebens. Hamburg 1853. 1⅙ ℛ.

Einleitung in die Infinitesimalrechnung.
Erster Theil: **Differentialrechnung.** Zum Selbstunterricht. Mit Rücksicht auf das Nothwendigste u. Wichtigste. Hamburg 1855. 1⅓ ℛ.